Nr. 3. Die fünf regelmäßigen Vielflache PLATONs. Regelmäßigkeit in einer Gruppe.

Zur II. Reihe der Modelle. Nr. 101 bis 105.

Von H. WIENER in Darmstadt.

Nicht allein für den elementaren Unterricht bilden die regelmäßigen Körper einen wichtigen Stoff, sondern auch für die Gruppentheorie, und je mehr in der Mathematik die Begriffe der Abbildung und der Gruppe von Abbildungen an Bedeutung gewinnen, desto mehr wird dies auch mit dem Begriff des Regelmäßigen der Fall sein.

Im Unterricht der darstellenden Geometrie sind die Bilder der regelmäßigen Vielflache schon lange ein beliebter Stoff, und wenn neuerdings die auf ihn verwendbare Zeit durch starke Betonung der für die Technik wichtigen Gebilde beschränkt worden ist, so wird man um so lieber zu dem Mittel greifen, wenigstens durch Schattenwerfen die bei der Projektion auftretenden Formen in kurzen Zügen vorzuführen.

Verschiedenartige Umrisse.

Bei Parallelprojektion kann der Sehstrahl (Lichtstrahl) zweierlei ausgezeichnete Lagen haben: Unendlich viele Lagen, wenn er in eine Fläche, und eine Einzellage, wenn er in eine Kante fällt; bei den Vielflachen, die zum Mittelpunkt spiegelig sind, also bei allen bis auf das Tetraeder, wird der Strahl dann auch in die Gegenfläche bezw. die Gegenkante fallen. Abgesehen aber von diesen Sonderfällen sind unter den unendlich vielen Lagen, die der Sehstrahl zum Vielflach haben kann, diejenigen als wesentlich verschieden zu bezeichnen, bei denen der Umriß verschiedenartige Vielecke aufweist; und unter diesen sind bei senkrecht zum Sehstrahl gestellter Tafel noch die Einzellagen als besondere hervorzuheben, bei denen der Umriß eine regelmäßige Gestalt hat. Nur beim *Würfel* tritt im Bild eine ein-

Modelle Nr. 101 bis 105.

zige Umrißfigur auf, das Sechseck, im besondern als regelmäßiges Sechseck. Das *Tetraeder* zeigt als Umrisse ein Dreieck oder ein Viereck, das *Oktaeder* ein Viereck oder ein Sechseck, das *Dodekaeder* ein Zehneck oder ein Zwölfeck, das *Ikosaeder* ein Sechseck oder ein Achteck oder ein Zehneck und im besonderen können diese Figuren — mit Ausnahme des Zwölfecks beim Dodekaeder und des Achtecks beim Ikosaeder — regelmäßig werden.

Die beiden ausgezeichneten Lagen des Strahles (in der Fläche oder in der Kante) liefern beim Tetraeder ein Dreieck als Umriß; die erste ausgezeichnete Lage (in der Fläche) beim Würfel ein Rechteck, beim Oktaeder ein Parallelogramm, die zweite Lage (in der Kante) beim Würfel ein Quadrat, beim Oktaeder einen Rhombus. Beim Dodekaeder liefert die erste Lage ein Achteck, die zweite ein Sechseck; beim Ikosaeder die Lage des Strahls in einer Fläche ein Achteck oder Sechseck, in zwei mit einer Ecke, aber keiner Kante zusammenstoßenden Flächen, ein Sechseck, und die Lage des Strahls in einer Kante gleichfalls ein Sechseck.

Begriff des Regelmäßigen.

Durch das Projizieren dieser Drahtmodelle auf eine Tafel läßt sich auch die Regelmäßigkeit dieser Vielflache erläutern. Man kann das Modell aus einer Anfangslage herausheben und in solche neue Lagen bringen, daß irgend eine Ecke an die frühere Stelle einer beliebig gewählten anderen kommt, und an dieser Ecke kann noch irgend eine durch diesen Punkt gehende Kante oder Fläche mit jeder anderen Fläche der Ecke zur Deckung gebracht werden, so daß sich das Vielflach in der neuen Lage völlig mit dem in der alten Lage hinzu gedachten deckt. In dieser Eigenschaft aber spricht sich *das Wesen des regelmäßigen geometrischen Gebildes* aus. Auch im Bilde (Schatten) läßt sich durch eine solche Drehung des körperlichen Modells beweisen, daß dieses regelmäßig ist, da bei einer jeden der unendlich vielen möglichen Projektionen ein Decken der gedrehten Lage mit der ursprünglichen eintritt.

Anwendung auf Krystalle.

Der soeben für die Vielflache gegebene Begriff des Regelmäßigen findet bei der Aufstellung aller möglichen Krystallformen eine wichtige Anwendung, indem diese Formen aus *regelmäßigen Punktsystemen* abgeleitet werden. Wie vorhin bei den regelmäßigen Vielflachen die Gruppe aller Drehungen um einen festen Punkt zu grunde lag, so hat man hier von solchen Abbildungen auszugehen, die den ganzen Raum in sich überführen, und es hat sich dabei herausgestellt, daß die Gruppe aller kongruenten

Abbildungen noch durch diejenigen zu ergänzen ist, die den Raum in einen spiegelgleichen überführen [1]).

L. SOHNCKE definiert[2]): „Krystalle — unbegrenzt gedacht — sind regelmäßige unendliche Punktsysteme, d. h. solche, bei denen um jeden Massenpunkt herum die Anordnung der übrigen dieselbe ist, wie um jeden anderen Massenpunkt". Jedes solche Punktsystem bestimmt eine Gruppe (in besonderen Fällen mehrere Gruppen) von Abbildungen, die den Raum kongruent oder spiegelgleich in sich überführen und die Punkte des Systems untereinander vertauschen[3]), und umgekehrt bestimmt jede solche Gruppe regelmäßige Punktsysteme, die man erhält, indem man irgend einen Punkt des Raumes allen Abbildungen der Gruppe unterwirft.

Die Frage nach allen von einander wesentlich verschiedenen regelmäßigen Punktsystemen, also nach allen Krystallformen verschiedener Struktur, führt daher auf die Frage nach allen wesentlich verschiedenen Gruppen von Abbildungen, die den Raum kongruent oder spiegelgleich in sich überführen, vorausgesetzt, daß man sich dabei auf Gruppen diskreter Abbildungen beschränkt.

Dementsprechend ergibt sich überhaupt der Begriff des Regelmäßigen für Punktsysteme als abhängig von der Gruppe der Abbildungen, die man zu grunde legen will, so daß sich mit dieser auch die Gesamtheit der von ihr erzeugten regelmäßigen Gebilde ändert. Beispielsweise wird die Gesamtheit von n Punkten der Ebene für eine Gruppe von Drehungen um einen festen Punkt in der Ebene dann und nur dann regelmäßig sein, wenn sie die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks bildet; nimmt man aber zu dieser Gruppe noch symmetrische Abbildungen der Ebene hinzu, so werden schon die Eckpunkte eines sonst als halbregelmäßig

---

[1]) Diese Auffassung legt CHR. WIENER seiner Theorie der Entstehung der Krystalle zu grunde. („Die Grundzüge der Weltordnung". Leipzig u. Heidelberg, 1863, S. 82 ff.)

[2]) L. SOHNCKE: „Entwickelung einer Theorie der Krystallstruktur". Leipzig 1879, S. 28. Die obige Erklärung wird von SOHNCKE „als einzige zur Begründung seiner Theorie nötige Hypothese" eingeführt. Sie ist ein anderer Ausdruck der von CHR. WIENER a. a. O. gegebenen Definition.

[3]) Wie die Spiegelung fassen wir die Überführung eines räumlichen Systems in ein kongruentes auch als „Abbildung" auf, da es sich hier nur um die Beziehung der Anfangs- auf die Endlage und nicht um eine stetige Folge von Zwischenlagen handelt.

bezeichneten n-Ecks der Bedingung der Regelmäßigkeit genügen.[1])

Die Gruppen der regelmäßigen Vielflache.

Zur Bestimmung der regelmäßigen Vielflache kann man ebenfalls von ihren Gruppen ausgehen, nämlich den Gruppen von Drehungen eines starren räumlichen Systems um einen festen Punkt[2]). Man hat dann ein regelmäßiges Vielflach als ein solches zu definieren, von dem in dieser Gruppe die Ecken ein regelmäßiges Punktsystem, die Kanten und Seiten ein regelmäßiges System von Strahlen und Ebenen bilden. Man erhält hieraus sofort außer den gewöhnlichen (PLATONischen) noch die höheren Vielflache, wie dies in der 5. Abhandlung ausgeführt werden soll. Meist geht man den umgekehrten Weg und denkt sich die gewöhnlichen (PLATONischen) regelmäßigen Vielflache auf irgend eine Art gegeben, entnimmt sie beispielsweise aus der elementaren Stereometrie und stellt dann für jedes die Gruppe aller Drehungen um die Mitte des Vielflaches auf[3]). Dabei ergibt sich bekanntlich das Übereinstimmen der Gruppe des Würfels mit der des Oktaeders, der Gruppe des Dodekaeders mit der des Ikosaeders. Und man erhält so die Tetraedergruppe mit 12 kongruenten Abbildungen, nämlich außer der Identität oder Deckung (Periode 1) 3 + 8 Abbildungen von den Perioden 2 und 3; bei der Oktaedergruppe ergeben sich 24 kongruente Abbildungen, nämlich 1 + 3 + 6 + 8 + 6 von den Perioden 1, 2, 2, 3, 4 und endlich bei der Ikosaedergruppe 60 kongruente Abbildungen, nämlich 1 + 15 + 20 + 24 von den Perioden 1, 2, 3, 5[4]).

---

[1]) Von der SOHNCKEschen Definition geht auch EDMUND HESS in seinem Buche „Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung" (Leipzig 1883) aus. Seine Untersuchungen beziehen sich auf Gruppen von Drehungen und symmetrischen Abbildungen mit Festhaltung eines Punktes.

[2]) P. GORDAN löst die Aufgabe „Alle endlichen Gruppen zu konstruieren, die sich aus linearen Transformationen einer Veränderlichen bilden lassen". Math. Ann. Bd. 17, S. 23 ff. Damit sind auch die oben erwähnten Gruppen von Drehungen unabhängig von geometrischen Betrachtungen bestimmt.

[3]) Auf eine Darstellung dieser Gruppen durch noch einfachere Gebilde, als es die regelmäßigen Körper sind, wird in Nr. 4 dieser Abhandlungen hingewiesen.

[4]) Die Beziehungen zwischen Gruppentheorie und regelmäßigen Vielflachen werden sehr eingehend behandelt in F. KLEINS „Vorlesungen über das Ikosaeder..." (Leipzig 1884). Die gewöhnlichen regelmäßigen Körper werden in diesem Buche als Orientierungsmittel zum Studium der zugehörigen Gruppen beigezogen. Dabei treten die oben entwickelten Begriffe als wesentlich auf. So wird dort außer der Gruppe der Drehungen noch die „erweiterte Gruppe" eingeführt, die durch Hinzufügen von symmetrischen Abbildungen entsteht. Ferner wird das oben abgeleitete regelmäßige Punktsystem benützt, um daraus „Fundamentalbereiche" zu bilden. Um sich den in diesem Buche enthaltenen umfangreichen geometrischen Stoff anschaulich zu machen, dürften die Drahtmodelle der regelmäßigen Körper wegen ihrer Durchsichtigkeit besonders geeignet sein.