

Mathematische Modelle

angefertigt

im mathematischen Institut der k. technischen Hochschule in München

unter Leitung von Prof. Dr. Brill.

Math. Z.

(2. Nachtrag.)

Asymptotencurven auf einigen Rotationsflächen.

Von cand. math. Gottlieb Herting.

Wenn die Meridiancurve einer Rotationsfläche durch die Gleichung

$$1) \quad z = f(r)$$

dargestellt ist, so nimmt bekanntlich die Gleichung der Linien, welche sich durch Projection der Asymptotencurven in eine zur Rotationsaxe senkrechte Ebene ergeben, in Polarcoordinaten r, φ geschrieben, folgende einfache Gestalt an:

$$2) \quad \varphi = \int \sqrt{\frac{dz}{dr}} \cdot dr + \varphi_0.$$

Diese Gleichung repräsentirt ersichtlich zwei übereinander gelagerte Systeme von congruenten Curven, die nur gegeneinander um den Anfangspunkt verdreht erscheinen. Wir können nun entweder den Meridian der Rotationsfläche (1) geben und nach den Curven (2) fragen, oder auch umgekehrt. Für zwei einfachere Fälle sei zunächst die letztere Fragestellung gewählt.

I. Wir wollen nach der Rotationsfläche fragen, deren Asymptotencurven sich in die erwähnte Ebene als congruente Kreise, die alle durch einen Punkt gehen, projeciren.

Die Gleichung dieser Kreise sei:

$$3) \quad \varphi = \arccos \frac{r}{d} + \varphi_0,$$

dann ergibt sich für den Meridian der entsprechenden Rotationsfläche die Gleichung:

$$\sqrt{\frac{-z''}{rz'}} = \frac{-1}{\sqrt{d^2 - r^2}}, \text{ oder integriert:}$$

$$4) \quad z = \frac{1}{c} \left(r \sqrt{d^2 - r^2} - d^2 \arccos \frac{r}{d} \right).$$

Diese Fläche besitzt in den parallelen Kreisen $r = d$, $z = -\frac{d^2}{c} \cdot n\pi$ Rückkehrkanten, an welche die Asymptotencurven berührend herantreten und in den Punkten $r = 0$, $z = -\frac{d^2}{c} \cdot \frac{2n+1}{2} \pi$ konische Knoten, durch welche jene Curven die Erzeugenden des Tangentialkegels berührend hindurchlaufen.

II. Die Projection der Asymptotencurven seien logarithmische Spiralen, welche durch die Gleichung:

$$5) \quad \varphi = \pm \sqrt{m} \log r + \varphi_0$$

gegeben seien.

Für die entsprechenden Meridiancurven finden wir die Gleichung:

$$6) \quad z = c \frac{r^{1-m}}{1-m},$$

worin m eine positive Zahl sein muss, wenn wir Rotationsflächen mit negativer Krümmung erhalten wollen. Für den Ausnahmefall $m = 1$ ergibt sich:

$$6a) \quad z = c \log r.$$

Folgende Beispiele sind durch Modelle dargestellt:

Meridian:	
$m = \frac{1}{3}$	Semicubische Parabel,
$m = \frac{1}{2}$	Apollonische „
$m = \frac{2}{3}$	Cubische „
$m = 1$	logarithmische Curve,
$m = 2$	gleichseitige Hyperbel.
$m = 3$	

In den drei ersten Fällen weisen die Rotationsflächen um die Z -Axe biplanare Knoten mit imaginären Hauptebenen auf, und zwar im ersten Falle einen B_3 , im zweiten einen B_4 und im dritten einen B_6^*). In den drei andern Fällen liegt der biplanare Knoten im Unendlichen.

*) Der Index bedeutet die Reduction, welche der Knoten auf die Klassenzahl der Fläche ausübt.