Modelle von Flächen vierter Ordnung

nach Herrn Kummer in Berlin.

Abdruck ¹⁾ aus den Monatsberichten der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1863, S. 539.

Bei Gelegenheit dieser Mittheilung legte Herr *Kummer* ein von ihm angefertigtes Gipsmodell der Steiner'schen Fläche vor.

Die dargestellte specielle Fläche²⁾ ist so gewählt, dass sie eine endliche, allseitig begränzte ist, dass in ihren Theilen die grösstmögliche Symmetrie herrscht, und dass alle Haupteigenschaften der allgemeinen Steiner'schen Fläche an ihr in realer Weise sichtbar hervortreten. Allen diesen Anforderungen genügt die Fläche, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten

$$y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 - 2cxyz = 0$$

ist. Die drei graden Doppellinien, welche hier nur zum Theil auf der Fläche selbst liegen, und als isolirte Linien sich alsdann weiter in's Unendliche fortsetzen, stehen auf einander senkrecht, und die auf denselben zu nehmenden Längen, welche als Axen der Fläche bezeichnet werden können, sind einander gleich. Die Fläche ist zum Theil convex-convex, zum Theil convex-concav. Die Tangentialebenen an die ersteren Theile schneiden nur je zwei imaginäre Kegelschnitte aus, die Tangentialebenen aber, deren Berührungspunkte in den convex-concaven Theilen liegen, schneiden reale Kegelschnittpaare aus. Vier besondere Tangentialebenen schneiden solche Kegelschnittpaare aus, welche in einen Kegelschnitt zusammenfallen und berühren die Fläche nicht blos in einem Punkte, sondern in diesen Kegelschnitten, als singuläre Tangentialebenen und

¹⁾ Die folgenden mit gütiger Erlaubniss des Herrn Verfassers unverändert entnommenen Abdrücke hat die Verlagshandlung mit in Klammern gesetzten Hinweisen auf die Nummern der neunten Serie ihrer Modelle, welche die in diesen Mittheilungen beschriebenen Modelle umfasst, zu begleiten sich erlaubt.

²⁾ [Nr. 3 der neunten Serie der Verlagshandlung.]

ihre Berührungs-Kegelschnitte, welche in dem vorliegenden speciellen Falle Kreise sind, scheiden zugleich die convex-convexen Theile der Fläche von den convex-concaven. Endlich ist noch zu bemerken, dass die allgemeinste Steinersehe Fläche, welche fünfzehn wesentliche Constanten enthält, aus der in dem Modell dargestellten speciellen Fläche durch collineare Verwandlung erhalten wird.

Abdruck aus den Monatsberichten der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1866, S. 216—220.

Wenn p, q, r, s vier lineare Funktionen und φ eine Funktion zweiten Grades der Coordinaten x, y, z bezeichnen, so ist

$$(1.) \quad \varphi^2 - 4\lambda p q r s = 0$$

die Gleichung einer Fläche vierten Grades, für welche die vier Ebenen $p=0, q=0, r=0, s=0$, singuläre Tangentialebenen sind, die diese Fläche in Kegelschnitten berühren. Wenn p, q, r, s vier von einander unabhängige lineare Funktionen sind, so bilden diese vier Ebenen ein Tetraëder und jede der sechs Kanten dieses Tetraëders schneidet die Fläche zweiten Grades in zwei Punkten, welche Knotenpunkte der Fläche vierten Grades sind; dieselbe hat daher im Allgemeinen zwölf Knotenpunkte.

Lässt man die Fläche $\varphi=0$ durch einen der vier Eckpunkte dieses Tetraëders hindurchgehen, so vereinigen sich drei dieser zwölf Knotenpunkte in einen, welcher ein uniplanarer Knotenpunkt wird, und wenn man die Fläche $\varphi=0$ durch alle vier Eckpunkte des Tetraëders hindurchgehen lässt, so vereinigen sich viermal drei Knotenpunkte zu je einem uniplanaren und man erhält eine Fläche vierten Grades mit vier uniplanaren Knotenpunkten, deren Gleichung ist:

$$(2.) \quad (aqr + brp + cpq + dps + eqs + frs)^2 - 4\lambda p q r s = 0.$$

Die Ebenen der uniplanaren Knotenpunkte sind zugleich Tangentialebenen der Fläche $\varphi=0$; eine jede derselben schneidet aus der Fläche vierten Grades eine Curve vierten Grades aus, welche in dem Knotenpunkte einen dreifachen Punkt hat.

Die von einem jeden der vier Knotenpunkte ausgehenden einhüllenden Kegel sechsten Grades bestehen aus den drei durch diesen Knotenpunkt gehenden singulären Tangentialebenen und aus einem einhüllenden Kegel dritten Grades.

Das Modell 1.¹⁾ zeigt diese Fläche, in welcher die Constanten so gewählt sind, dass die Knotenpunkte real sind und dass die Fläche mög-

¹⁾ [Modell Nr. 5 der neunten Serie der Verlagshandlung.]

lichst symmetrisch wird und nicht ins Unendliche geht. Die vier singulären Tangentialebenen:

$$\begin{aligned} p &= z - k + x\sqrt{2} \\ q &= z - k - x\sqrt{2} \\ r &= -z - k + y\sqrt{2} \\ s &= -z - k - y\sqrt{2} \end{aligned}$$

bilden ein reguläres Tetraëder und da $a = b = c = d = e = f = 1$ gewählt ist, so wird die Fläche $\varphi = 0$ zu der dem regulären Tetraëder umschriebenen Kugel; die Constante λ ist gleich $\frac{1}{2}$ genommen. Die Gleichung der durch das Modell dargestellten Fläche ist daher:

$$(3.) \quad (x^2 + y^2 + z^2 - 3k^2)^2 - \frac{1}{2}[(z - k)^2 - 2x^2][(z + k)^2 - 2y^2] = 0.$$

Diese Fläche besteht aus sechs congruenten endlichen Theilen, deren jeder in zwei Spitzen ausläuft, je drei dieser zwölf Spitzen vereinigen sich in einem der vier uniplanaren Punkte. Das Modell bringt die einfachste und allgemeinste Art der uniplanaren Knotenpunkte zur Anschauung, nämlich die der zweiten Ordnung, in welchen die Ebene des uniplanaren Punktes aus der Fläche eine Curve ausschneidet, die in diesem Punkte einen dreifachen Punkt hat. Wenn die drei durch diesen Punkt gehenden Aeste der Curve alle real sind und in diesem Punkte drei verschiedene Tangenten haben, so hat ein solcher uniplanarer Knotenpunkt stets die Eigenschaft, dass in ihm drei verschiedene Theile der Fläche sich vereinigen, welche in der Nähe des Knotenpunktes nur diesen einen Punkt mit einander gemein haben.

Einen interessanten besonderen Fall der Fläche (2.) erhält man, wenn man $a = b = c = d = e = f = 1$, und auch $\lambda = 1$ setzt, also

$$(4.) \quad (qr + rp + pq + ps + qs + rs)^2 - 4pqrs = 0.$$

Diese Fläche hat ausser den vier uniplanaren Knotenpunkten noch drei gewöhnliche Knotenpunkte mit osculirenden Kegeln zweiten Grades und sie hat ausser den vier singulären Tangentialebenen noch sechs andere, also im Ganzen zehn singuläre Tangentialebenen. Sie kann auch als ein specieller Fall der allgemeinen Fläche vierten Grades mit 15 Knotenpunkten angesehen werden, nämlich als der Fall, wo von diesen 15 Knotenpunkten viermal drei sich zu vier uniplanaren Knotenpunkten vereinigen und drei als gewöhnliche Knotenpunkte bestehen bleiben. Die von den vier uniplanaren Knotenpunkten ausgehenden einhüllenden Kegel sechsten Grades bestehen hier jeder aus sechs der zehn singulären Tangentialebenen, während diese einhüllenden Kegel für jeden der drei gewöhnlichen Knotenpunkte aus vier singulären Tangentialebenen und einem einhüllenden Kegel zweiten Grades bestehen. Diese Fläche hat auch, wie ich an einem anderen Orte zeigen werde, die merkwürdige Eigenschaft, dass das

vollständige System aller ihrer zweifach berührenden Tangenten aus sechs getrennten Strahlensystemen zweiter Ordnung und dritter Klasse besteht.

Wenn die Fläche zweiten Grades $\varphi = 0$ in der Gleichung (1.) eine der sechs Tetraëderkanten berührt, so vereinigen sich in diesem Berührungspunkte zwei Knotenpunkte der Fläche in einen und bilden so einen biplanaren Knotenpunkt. Lässt man die Fläche $\varphi = 0$ alle sechs Tetraëderkanten berühren, so erhält man eine Fläche vierten Grades mit sechs biplanaren Punkten, welche durch die Gleichung

$$(5.) (p^2 + q^2 + r^2 + s^2 - 2qr - 2rp - 2pq - 2ps - 2qs - 2rs)^2 - 4\lambda p q r s = 0$$

dargestellt wird.

Die sechs biplanaren Knotenpunkte dieser Fläche liegen so, dass dreimal je vier in eine und dieselbe Ebene fallen, woraus unmittelbar folgt, dass diese drei Ebenen, deren jede vier Knotenpunkte enthält, aus der Fläche vierten Grades Kegelschnittpaare ausschneiden.

Der von einem jeden der sechs Knotenpunkte ausgehende einhüllende Kegel sechsten Grades besteht aus den beiden durch denselben hindurchgehenden singulären Tangentialebenen und aus einem Kegel vierten Grades mit einer Doppelkante, in welcher dieser Kegel sich selbst berührt.

Das Modell II.¹⁾ zeigt diese Fläche für den besonderen Fall, wo ebenfalls die vier singulären Tangentialebenen ein regelmässiges Tetraëder bilden und die Fläche $\varphi = 0$ die alle sechs Kanten desselben berührende Kugel ist. Die Grösse λ hat den besonderen Werth $\lambda = -\frac{1}{4}g$ erhalten, für welchen die Fläche in einem endlichen Raume eingeschlossen ist und passende Verhältnisse ihrer Dimensionen erhält. Die Gleichung dieser bestimmten Fläche ist:

$$(6.) (x^2 + y^2 + z^2 - k^2)^2 + \frac{1}{3}[(z - k)^2 - 2x^2][(z + k)^2 - 2y^2] = 0;$$

sie besteht aus vier besonderen einander congruenten Theilen, deren jeder mit den drei anderen in drei biplanaren Knotenpunkten zusammenhängt. Das Modell bringt eine besondere Art der biplanaren Knotenpunkte zur Anschauung, nämlich diejenigen, in welchen die beiden osculirenden Ebenen real sind und eine beliebige durch die Durchschnittslinie derselben hindurchgehende Ebene eine Curve ausschneidet, welche in diesem Punkte sich selbst berührt. Diese Knotenpunkte sind daher nicht als die einfachsten und allgemeinsten biplanaren Knotenpunkte anzusehen, weil bei diesen eine jede solche Ebene eine Curve ausschneidet, welche in dem Knotenpunkte eine Spitze hat, aber nicht einen Punkt der Selbstberührung.

Die durch die Gleichung (5.) dargestellte allgemeine Fläche vierten Grades mit sechs biplanaren Knotenpunkten enthält als speciellen Fall

¹⁾ [Diesem Modell entspricht der in der Abhandlung vom Jahr 1872 (s. unten) mit I. bezeichnete Typus, Nr. 1 der neunten Serie der Verlagshandlung.]

auch die Steinersche Fläche¹⁾, welche drei in einem und demselben Punkte sich schneidende Doppelgrade hat, nämlich für den besonderen Werth $\lambda = 16$. Für diesen Werth ist

$$(7.) (p^2 + q^2 + r^2 + s^2 - 2qr - 2rp - 2pq - 2ps - 2qs - 2rs)^2 - 64pqrs = 0,$$

welche Gleichung in irrationaler Form durch

$$(8.) \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} + \sqrt{s} = 0$$

dargestellt werden kann, da diese rational gemacht genau mit der anderen übereinstimmt, und die allgemeine Gleichung der Steinerschen Fläche ist, wenn die vier singulären Tangentialebenen derselben als die Ebenen $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$ gewählt werden. Die sechs biplanaren Knotenpunkte der allgemeineren Fläche sind an der Steinerschen Fläche noch erkennbar vorhanden, sie liegen aber in den drei Doppelgraden und sind singuläre Punkte von uniplanarer Beschaffenheit geworden; es sind diejenigen sechs Punkte, in welchen diese drei Doppelgraden aufhören auf der Fläche selbst zu liegen und zu isolirten Linien werden.

¹⁾ [Nr. 3 der neunten Serie.]

Abdruck aus den Monatsberichten der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1872, S. 474–483.

Herr Kummer las:

Ueber einige besondere Arten von Flächen vierten Grades.

Die Flächen vierten Grades, welche von einer Schaar von Flächen zweiten Grades eingehüllt werden, in der Art, dass jede Fläche zweiten Grades die Fläche vierten Grades in einer Curve vierten Grades berührt, sind alle in der Form:

$$\varphi^2 = \psi\chi \quad \dots (A)$$

enthalten, wo φ , ψ , χ drei beliebige Funktionen zweiten Grades der Coordinaten darstellen. Die Schaar der Flächen zweiten Grades, welche diese Fläche vierten Grades einhüllt, ist durch die Gleichung

$$\alpha^2\psi + 2\alpha\varphi + \chi = 0 \quad \dots (B)$$

gegeben, in welcher α der veränderliche Parameter ist. Diese sehr allgemeine Art von Flächen vierten Grades, in welcher die meisten der bisher besonders behandelten interessanteren Flächen vierten Grades enthalten

sind, besitzt eine bemerkenswerthe, so viel ich weiss bisher noch nicht bekannte Eigenschaft, welche das System ihrer Doppeltangenten betrifft, und welche darin besteht, dass das Strahlensystem 12. Ordnung und 28. Klasse, welches von sämmtlichen Doppeltangenten der allgemeinen Fläche vierten Grades gebildet wird, für diese besondere Art von Flächen vierten Grades in zwei getrennte Strahlensysteme zerfällt, deren eines von der 4. Ordnung und der 12. Klasse, das andere von der 8. Ordnung und der 16. Klasse ist.

Um dies zu beweisen, betrachte ich die Schaar der einhüllenden Flächen zweiten Grades (B). Eine jede Fläche dieser Schaar enthält als Fläche zweiten Grades zwei Schaaren grader Linien und alle diese graden Linien sind doppelt berührende Linien der Fläche (A); denn da jede Fläche der Schaar (B) die Fläche (A) nur berührt und nirgends schneidet, so kann auch jede auf ihr liegende grade Linie die Fläche (A) nur berühren, die vier Durchschnittspunkte, welche eine beliebige grade Linie mit der Fläche (A) hat, müssen also für jede auf einer Fläche der Schaar (B) liegende grade Linie zu zwei Berührungspunkten vereinigt sein.

Die sämmtlichen graden Linien der Schaar von Hyperboloiden (B) bilden also ein selbständiges Strahlensystem, welches die Fläche (A) zur Brennfläche hat. Um die Ordnung und Klasse dieses Strahlensystems zu bestimmen, bemerke ich, dass durch einen jeden Punkt des Raumes zwei Hyperboloide der Schaar (B) hindurchgehen, da die Gleichung dieser Schaar in Beziehung auf α quadratisch ist, und dass in jedem dieser beiden Hyperboloide zwei grade Linien durch diesen Punkt gehen. Das Strahlensystem ist also von der 4. Ordnung, da durch jeden Punkt des Raumes vier Strahlen desselben gehen. Betrachtet man ferner eine beliebige feste Ebene, so wird dieselbe von 6 Hyperboloiden der Schaar (B) berührt, denn die Bedingungsgleichung für die Berührung ist in Beziehung auf die Coëfficienten der berührenden Fläche zweiten Grades von drei Dimensionen, also in Beziehung auf α vom 6. Grade. Der Durchschnitt der festen Ebene mit den sechs dieselbe berührenden Flächen zweiten Grades gibt aber 12 grade Linien, welche die in dieser Ebene liegenden Strahlen des Systems sind, sodass dasselbe von der 12. Klasse ist.

Die Bedingung, dass die Fläche zweiten Grades (B) zu einer Kegel-
fläche werde, ist in Beziehung auf die Coëfficienten der Fläche von vier Dimensionen, also in Beziehung auf den Parameter α vom achten Grade; es gibt also acht Kegel zweiten Grades, deren grade Linien dem Strahlensysteme 4. Ordnung und 12. Klasse angehören und Strahlenkegel desselben bilden. Die Mittelpunkte dieser acht Kegel zweiten Grades gehören im Allgemeinen der Brennfläche (A) nicht an. Nach der allgemeinen Definition der Brennfläche, nach welcher sie der geometrische Ort der Punkte des Raumes ist, für welche zwei der von ihnen ausgehenden Strahlen sich zu einem vereinigen, muss aber ein jeder Mittelpunkt eines Strahlenkegels

ein Punkt der Brennfläche und zwar ein Knotenpunkt derselben sein. Dieser scheinbare Widerspruch löst sich dadurch, dass die Brennfläche vierten Grades (A) nur einen besonderen Theil der durch diese allgemeine Definition bestimmten Brennfläche bildet. Allgemein: wenn man das vollständige System aller doppelt berührenden graden Linien einer Fläche n ten Grades als Strahlensystem auffasst, so ist diese Fläche n ten Grades nur in dem Sinne die Brennfläche des Systems, als sie von allen Strahlen des Systems zweimal berührt wird, in dem Sinne aber, dass die Brennfläche der geometrische Ort aller Punkte des Raumes ist, für welche zwei Strahlen sich zu einem vereinigen, enthält die Brennfläche ausserdem noch die vollständige abwickelbare Fläche, welche von allen doppelt berührenden Ebenen der Fläche n ten Grades eingehüllt wird. Für die allgemeine Fläche n ten Grades ist diese abwickelbare Fläche vom Grade

$$n(n-2)(n-3)(n^2+2n-4),$$

also für die Flächen vierten Grades vom 160. Grade. Herr Salmon in seiner analytic geometry of three dimensions, p. 419 der ersten, sowie p. 455 der zweiten Ausgabe, findet als Grad dieser abwickelbaren Fläche die Zahl

$$4n(n-2)(n-3)(n^2+2n-4),$$

bemerkt jedoch selbst in der dieser Formel beigegebenen Note, dass sie auf einen Widerspruch führe, welcher noch einer ferneren Aufklärung bedürfe. Dieser Widerspruch löst sich dadurch, dass der Faktor 4 nur durch einen Rechnungsfehler zu dieser Formel hinzugekommen ist, wovon ich mich durch eine direkte Bestimmung des Grades dieser abwickelbaren Fläche nach zwei verschiedenen Methoden überzeugt habe.

Die drei Flächen zweiten Grades:

$$\psi = 0, \quad \varphi = 0, \quad \chi = 0,$$

aus welchen die Schaar der Flächen (B) zusammengesetzt ist, haben acht gemeinsame Punkte, welche, wie aus der Form der Gleichung (A) zu ersehen ist, acht Knotenpunkte dieser Fläche vierten Grades sind. Jede Fläche der Schaar (B) geht durch alle diese acht Knotenpunkte hindurch, durch einen jeden derselben gehen also unendlich viele Strahlen des Systems 4. Ordnung und 12. Klasse, dasselbe besitzt also ausser den oben gefundenen acht Strahlenkegeln zweiten Grades noch acht Strahlenkegel, deren Mittelpunkte in diesen acht Knotenpunkten liegen. Diese acht Strahlenkegel sind die von den Knotenpunkten ausgehenden, die Fläche vierten Grades einhüllenden Kegel, welche wie bekannt Kegel sechsten Grades sind.

Die von der Schaar aller doppelt berührenden Ebenen der Fläche vierten Grades (A) eingehüllte abwickelbare Fläche des 160. Grades enthält diese acht Kegel sechsten Grades in sich und zwar jeden zweimal;

ferner enthält sie auch die oben gefundenen acht Kegel zweiten Grades, jeden einmal. Da alle diese Kegel zusammen ein Gebilde des 112. Grades ausmachen, so kann nur noch eine abwickelbare Fläche des 48. Grades hinzukommen, welche im Allgemeinen nicht konisch ist, sondern eine wirkliche Wendekurve besitzt.

Stellt man die beiden Schaaren grader Linien, welche auf einer jeden Fläche der Schaar (B) liegen, gesondert dar, so enthält ihr Ausdruck als einzige Irrationalität die Quadratwurzel aus der Determinante $\mathcal{A}$, welche gleich Null gesetzt die Bedingung gibt, dass die Fläche zweiten Grades (B) eine Kegelfläche sei. Wenn nun diese Determinante $\mathcal{A}$, welche eine ganze rationale Funktion achten Grades von α ist, ein vollständiges Quadrat ist, also $\sqrt{\mathcal{A}}$ rational in Beziehung auf α , so lassen sich die beiden Schaaren von graden Linien auf der Fläche zweiten Grades (B) trennen, in der Art, dass beide für sich rational in Beziehung auf α ausgedrückt werden, und man erhält statt eines Strahlensystems vierter Ordnung zwei Strahlensysteme zweiter Ordnung. Auf diese Weise kann man alle Strahlensysteme zweiter Ordnung herleiten, welche Brennflächen und nicht Brenncurven haben, mit alleiniger Ausnahme des Strahlensystems zweiter Ordnung und siebenter Klasse, da sich die Strahlen aller übrigen in Schaaren zusammenschließen lassen, welche nur je eine Schaar der graden Linien eines Hyperboloids ausmachen. Die Strahlen des Strahlensystems zweiter Ordnung und siebenter Klasse aber lassen sich überhaupt nicht in Schaaren von graden Linien von Hyperboloiden zusammenfassen, sowie auch die Brennfläche dieses Strahlensystems die einzige ist, welche nicht als Einhüllende einer Schaar von Flächen zweiten Grades dargestellt werden kann.

Ich betrachte jetzt die etwas speciellere Art von Flächen vierten Grades, deren Gleichungen die Form haben:

$$\varphi^2 = pqr s \quad \dots (C)$$

wo φ eine Funktion zweiten Grades, p, q, r, s lineare Funktionen der Coordinaten sind. Diese Art von Flächen lässt sich auf drei verschiedene Arten als Einhüllende einer Schaar von Flächen zweiten Grades betrachten, denn eine jede der drei Schaaren von Flächen zweiten Grades:

$$\begin{aligned} \alpha^2 p q + 2 \alpha \varphi + r s &= 0 \\ \beta^2 p r + 2 \beta \varphi + q s &= 0 \\ \gamma^2 p s + 2 \gamma \varphi + p s &= 0 \end{aligned} \quad \dots (D)$$

hat eine und dieselbe Fläche (C) zur einhüllenden Fläche. Die vier Ebenen:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0,$$

die im Allgemeinen ein Tetraëder bilden, sind vier singuläre Tangentialebenen der Fläche, welche dieselbe in Kegelschnitten berühren. Jede

der sechs Kanten dieses Tetraeders schneidet die Fläche zweiten Grades

$$\varphi = 0$$

in zwei Punkten, welche Knotenpunkte der Fläche vierten Grades (C) sind, sodass dieselbe zwölf Knotenpunkte hat. Ein jeder der von den zwölf Knotenpunkten ausgehenden einhüllenden Kegel sechsten Grades enthält zwei der vier singulären Tangentialebenen, wird also, wenn diese besonders betrachtet werden, zu einem Kegel vierten Grades.

Da die Fläche (C) auf drei verschiedene Weisen als Einhüllende einer Schaar von Flächen zweiten Grades sich darstellen lässt, so werden ihre Doppeltangenten drei verschiedene Strahlensysteme vierter Ordnung bilden, wenn nicht etwa zwei dieser drei Strahlensysteme entweder ganz identisch werden, oder doch ein niederes Strahlensystem gemeinschaftlich enthalten. Das letztere ist in der That der Fall, da die vier Strahlensysteme 0ter Ordnung und erster Klasse, welche in den vier singulären Tangentialebenen liegen, allen dreien gemeinsam sind; werden diese abgesondert, so bleiben drei Strahlensysteme vierter Ordnung und achter Klasse übrig, welche von den doppelt berührenden graden Linien der Fläche (C) gebildet werden. Ausserdem aber enthalten je zwei der drei Strahlensysteme keine weiteren gemeinsamen Strahlensysteme, sondern nur gewisse einfach unendliche Schaaren von Strahlen, welche Kegelflächen bilden und, wie eine genaue Untersuchung zeigt, nur die von den zwölf Knotenpunkten ausgehenden Strahlenkegel vierten Grades sind, von denen je vier je zweien dieser drei Systeme gemeinsam angehören.

Die Gleichung achten Grades, welche diejenigen Werthe des α gibt, für welche

$$\alpha^2 p q + 2 \alpha \varphi + r s = 0$$

zu einer Kegelfläche wird, erniedrigt sich hier um vier Einheiten, weil sie die beiden Wurzeln $\alpha = 0$ und $\alpha = \infty$ jede zweimal enthält und für diese Werthe nur die Systeme zweier Ebenen $p = 0$, $q = 0$ und $r = 0$, $s = 0$ ergibt. Diese Schaar von Flächen zweiten Grades enthält also nur vier wirkliche Kegel und da dasselbe auch bei den beiden anderen Schaaren bei (D) der Fall ist, so hat die Fläche (C) im Ganzen zwölf einhüllende Kegel zweiten Grades, deren Mittelpunkte nicht in den Knotenpunkten dieser Fläche liegen.

Das vollständige System aller doppelt berührenden graden Linien der Fläche (C) besteht also aus vier Strahlensystemen 0ter Ordnung und erster Klasse und aus drei Strahlensystemen vierter Ordnung und achter Klasse, mit zwölf von den Knotenpunkten ausgehenden Strahlenkegeln vierten Grades und zwölf nicht von den Knotenpunkten ausgehenden Strahlenkegeln zweiten Grades.

Die abwickelbare Fläche des 160. Grades, welche von der Schaar aller doppelt berührenden Ebenen der Fläche (C) eingehüllt wird, besteht für diese Art von Flächen vierten Grades nur aus Kegelflächen und Ebenen. Es gehören dazu erstens die zwölf einhüllenden Kegel vierten Grades, welche von den zwölf Knotenpunkten ausgehen, welche, da sie doppelt zu zählen sind, zusammen ein Gebilde des 96. Grades ausmachen. Ferner gehören dazu die zwölf einhüllenden Kegel zweiten Grades, welche einfach zu zählen sind und darum ein Gebilde des 24. Grades ausmachen. Endlich gehören noch die vier singulären Tangentialebenen dazu, deren jede zehnfach zu zählen ist, welche also zusammen ein Gebilde 40. Grades darstellen. Hierdurch wird der Grad 160 dieser abwickelbaren Fläche vollständig erschöpft.

Um möglichst bestimmte Anschauungen der in der Form

$$\varphi^2 = p q r s$$

enthaltenen Flächen vierten Grades zu gewinnen, habe ich einige der merkwürdigsten durch Gipsmodelle dargestellt. Dabei habe ich, um möglichst symmetrische und reguläre Formen zu erhalten, die vier Ebenen $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$ als die vier Seitenflächen eines regulären Tetraeders gewählt und die Fläche zweiten Grades $\varphi = 0$ als eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des regulären Tetraeders zusammenfällt, nämlich:

$$\begin{aligned} p &= z - k + x\sqrt{2}, \\ q &= z - k - x\sqrt{2}, \\ r &= z + k + y\sqrt{2}, \\ s &= z + k - y\sqrt{2}, \end{aligned}$$

und

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(x^2 + y^2 + z^2 - \mu k^2),$$

so dass die Gleichungen der dargestellten Flächen alle die Form haben:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu k^2)^2 = \lambda [(x - k)^2 - 2x^2] [(z + k)^2 - 2y^2].$$

Um die Flächen vollständig darstellen zu können, habe ich nur diejenigen Werthe der Constanten gewählt, für welche sie ganz in einem endlichen begränzten Raume enthalten sind. Dieses hängt, wie leicht zu sehen ist, nur von der einen Constante λ ab und die genaue Untersuchung ergibt, dass für die Werthe des λ , welche in den Gränzen $\lambda = -3$ bis $\lambda = +1$ enthalten sind, diese Flächen stets in einem endlichen Raume enthalten sind, für alle nicht in diesem Intervalle liegenden Werthe des λ aber sich ins Unendliche erstrecken. Für $\lambda = 0$ erhält man zwei sich deckende Kugelflächen, und die Gestalt der Fläche wird wesentlich geändert, wenn λ durch diesen Werth $\lambda = 0$ hindurchgeht.

Wenn die Constante μ kleiner als Eins ist, so hat die Fläche keine realen Knotenpunkte, weil die sechs Kanten des regulären Tetraeders alsdann die Kugelfläche nicht treffen. Für $\mu = 1$, wo die sechs Tetraederkanten die Kugelfläche berühren, treten zuerst reale Knotenpunkte auf und zwar sechs biplanare Knotenpunkte, weil je zwei der zwölf Durchschnittspunkte der sechs Tetraederkanten mit der Kugel zu einem zusammenfallen. Wenn μ grösser als Eins ist, so sind zwölf reale Knotenpunkte mit osculirenden Kegeln zweiten Grades vorhanden. Nur in dem besonderen Falle $\mu = 3$, wo die vier Ecken des regulären Tetraeders auf der Kugelfläche liegen, treten je drei der zwölf Knotenpunkte zu einem zusammen und bilden so vier uniplanare Knotenpunkte. Wenn μ grösser als 3 wird, so treten sie wieder zu zwölf konischen Knotenpunkten auseinander.

Das Modell I¹⁾ stellt die Fläche dar für die Werthe der Constanten

$$\mu = 1, \lambda = -\frac{1}{8}, k = 40^{\text{mm}}.$$

Dieselbe besteht aus vier congruenten Theilen, welche nur in den sechs biplanaren Knotenpunkten zusammenhängen. Die beiden osculirenden Ebenen in jedem dieser Knotenpunkte sind real und bilden einen Winkel, dessen Cosinus gleich $\frac{1}{11}$ ist. Ein Modell dieser Art von Flächen habe ich der Akademie schon früher vorgelegt, um an demselben die Beschaffenheit biplanarer Knotenpunkte anschaulich zu machen, m. s. den Monatsbericht der Sitzung vom 23. April 1866.

Das Modell II stellt die Fläche dar für die Werthe der Constanten

$$\mu = 1, \lambda = \frac{9}{10}, k = 50^{\text{mm}},$$

und besteht ebenfalls aus vier congruenten Theilen, welche nur in den sechs biplanaren Knotenpunkten zusammenhängen. Diese biplanaren Knotenpunkte selbst sind aber von ganz anderer Beschaffenheit als die des vorhergehenden Falles, da die beiden osculirenden Ebenen derselben imaginär sind und nur eine reale Durchschnittslinie haben, so dass in unendlicher Nähe eines jeden Knotenpunktes die Fläche in diese grade Linie übergeht.

Das Modell III für die Werthe

$$\mu = 1, \lambda = 1, k = 50^{\text{mm}}$$

stellt die mit in diesen Cyclus gehörende Steinersche Fläche dar,

¹⁾ [Die oben mit I bis VI bezeichneten Modelle sind in derselben Reihenfolge die Modelle 1 bis 6 der neunten Serie der Verlagshandlung. Modell Nr. VII ist nicht veröffentlicht.]

welche die Eigenschaft hat, dass alle Tangentialebenen aus derselben Kegelschnittpaare ausschneiden. Ein etwas kleineres Modell derselben habe ich der Akademie schon früher vorgelegt und erklärt, m. s. den Monatsbericht der Sitzung vom 26. November 1863.

Da der Werth $\lambda = \frac{9}{10}$ in dem zweiten Modell dem Werthe $\lambda = 1$ für die Steinersche Fläche nahe liegt, so kann man aus der Vergleichung dieser beiden Modelle erkennen, wie die Fläche mit sechs biplanaren Knotenpunkten in die Steinersche Fläche mit den drei durch einen Punkt gehenden graden Doppellinien übergeht.

Das Modell IV mit den Werthen der Constanten

$$\mu = \frac{4}{3}, \quad \lambda = \frac{1}{2}, \quad k = 50^{\text{mm}}$$

zeigt eine Fläche mit zwölf konischen Knotenpunkten, welche aus zehn besonderen Theilen besteht, nämlich vier dreieckig gestalteten und sechs in zwei Ecken auslaufenden, die so verbunden sind, dass an jeden dreieckigen Theil sich drei zweieckige in den Knotenpunkten ansetzen. Jede der vier singulären Tangentialebenen geht durch sechs Knotenpunkte und berührt auf der äusseren Seite drei zweieckige, auf der inneren Seite drei dreieckige Theile.

Das Modell V mit den Werthen der Constanten

$$\mu = 3, \quad \lambda = \frac{1}{2}, \quad k = 25^{\text{mm}}$$

ist dasselbe, welches ich früher in der Sitzung der Akademie vom 23. April 1866 schon vorgezeigt habe, um an demselben die Beschaffenheit uniplanarer Knotenpunkte der Flächen zu veranschaulichen, es besteht aus sechs congruenten Theilen, deren jeder in zwei Spitzen ausläuft, je drei dieser Spitzen kommen in einem der vier uniplanaren Knotenpunkte zusammen.

Das Modell VI mit den Werthen der Constanten

$$\mu = 3, \quad \lambda = -\frac{1}{8}, \quad k = 30^{\text{mm}}$$

zeigt eine ganz anders gestaltete Fläche derselben Art, mit vier uniplanaren Knotenpunkten. Dieselbe besteht aus vier congruenten Theilen, deren jeder in drei Spitzen ausläuft, welche ebenfalls so verbunden sind, dass in jedem der vier uniplanaren Knotenpunkte drei dieser Theile mit ihren Spitzen zusammenkommen.

Das Modell VII für die Werthe der Constanten

$$\mu = 9, \quad \lambda = \frac{1}{4}, \quad k = 18^{\text{mm}}$$

stellt eine Fläche mit zwölf konischen Knotenpunkten dar, welche in den verlängerten Kanten des von den singulären Tangentialebenen gebildeten regulären Tetraeders liegen. Die Fläche besteht aus sechs congruenten

183

Theilen, deren jeder in vier Ecken ausläuft, mit denen er in den Knotenpunkten mit vier anderen dieser Theile zusammentrifft.

In diesen Cyclus von Flächen vierten Grades gehört als specieller Fall auch die Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten und 16 singulären Tangentialebenen, welche man erhält, wenn

$$\lambda = \frac{3\mu - 1}{3 - \mu}$$

genommen wird, welche ich in der Sitzung der Akademie vom 18. April 1864 vollständig behandelt habe. In derselben Sitzung habe ich auch ein aus Drähten angefertigtes Modell dieser Fläche vorgezeigt, welches die in den 16 singulären Tangentialebenen liegenden 16 Berührungs-Kegelschnitte darstellt, deren jeder durch sechs der 16 Knotenpunkte hindurchgeht. Ein neues Modell derselben Fläche ist vor Kurzem von Herrn Dr. F. Klein in Göttingen construirt worden, welcher dasselbe in Zinkguss¹⁾ hat ausführen und vervielfältigen lassen.

¹⁾ [Dasselbe Modell in Gips ist durch die Verlagshandlung zu beziehen.]