(2) 569 623
1

Modell einer Röhrenfläche mit einer (auf einem Zylinder gelegenen) Rückkehrkante.

Modell Nr. 122.

Die Fläche ist erzeugt gedacht durch Bewegung eines Kreises auf einer zur Achse des geraden Kreiszylinders parallelen Ebene. Das Modell zeigt nur die obere Hälfte der erzeugenden Kreise und auch nur den Teil der Fläche, auf dem die Rückkehrkante liegt. Die bewegte Kreisscheibe wird so an den Zylinder Z herangebracht (vgl. Fig. 1), dass die Bahn des einen Endpunktes A ihres horizontalen Durchmessers AB die Zylinderfläche senkrecht trifft; danach wälzt sich die Kreisscheibe vollständig an dem Zylinder ab (so dass also die Seelenachse, auf welcher der Mittelpunkt M läuft, eine Kreisevolvente ist), bis der Punkt B an den Zylinder trifft. Die Dimensionen des Modells sind speziell so gewählt, dass $\overline{AB} = 2\pi$ ist, wenn der Radius des Zylinders gleich 1 ist.

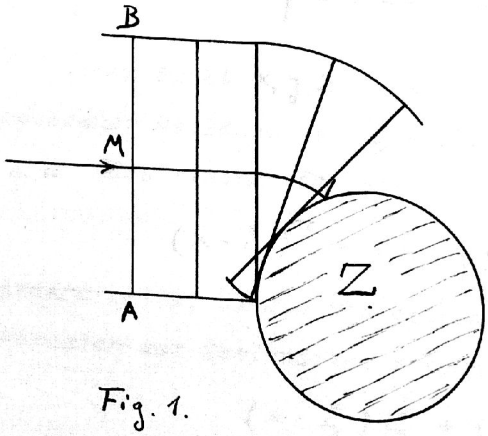

Fig. 1.

Die Gleichung dieser Fläche ist leicht aufzustellen. Wählt man das Koordinatensystem und die Parameter in der in Figur 2 an-

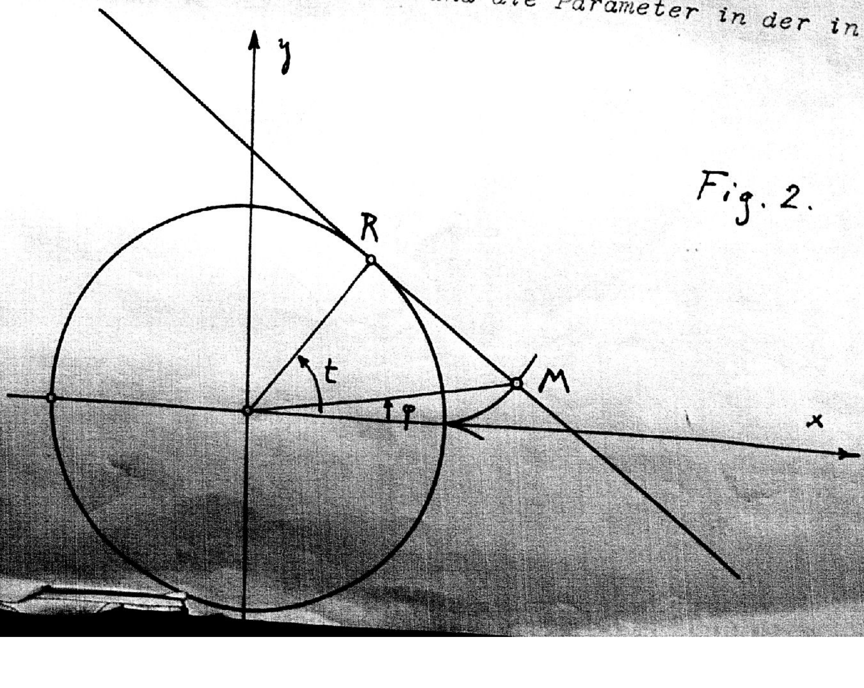

Fig. 2.

gegebenen Weise, so ergibt sich für die als Seelenachse dienende Kreisevolvente

$$r \cos(t-\varphi) = 1$$
$$r \sin(t-\varphi) = t$$

also

$$(1) \qquad \begin{aligned} \xi &= \cos t + t \sin t \\ \eta &= \sin t - t \cos t \end{aligned}$$

Für einen Punkt x, y, z einer Röhrenfläche mit in der xy = Ebene gelegener Seelenachse $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ und dem Durchmesser $2r$ muss einerseits gelten

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2 = r^2$$

andererseits, da die Projektion eines Punktes der Fläche auf der Normalen zur Seelenachse liegen muss,

$$(x-\xi)\dot{\xi} + (y-\eta)\dot{\eta} = 0 .$$

Setzt man in diese Gleichung gemäss (1) ein, so erhält man leicht

$$(2) \qquad \begin{aligned} \left(\sqrt{x^2+y^2-1} \pm t\right)^2 + z^2 &= r^2 \\ x \cos t + y \sin t &= 1 \end{aligned}$$

als Parameterdarstellung der Röhrenfläche, soweit ihre Seelenachse Kreisevolvente ist (im Modell ist $-\pi \leq t \leq \pi$). Insbesondere erhält man hieraus für die auf dem Zylinder liegende Rückkehrkante (der Punkt R in Fig.2 ist die Projektion des zum Parameterwerte t gehörigen Kurvenpunktes) die Parameterdarstellung :

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ z^2 &= r^2 - 1 \end{aligned}$$

Betrachtet man die Röhrenfläche als Integral der Differentialgleichung

$$z^2\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) = r^2$$

so sind die erzeugenden Kreise Charakteristiken, und die Rückkehrkante ist als Einhüllende von Charakteristiken eine Monge'sche Kurve (vgl. Vorlesung v.Prof.Courant über partielle Differentialgleichungen, W.S.1925/26 Ausarbeitung S.38 ff,S.49 ff).