541 555 623

Mathematische Modelle

angefertigt

im mathematischen Institut der k. technischen Hochschule zu München.

(Zu Serie XVII.)

Modelle zur Functionentheorie

angefertigt

auf Veranlassung von Prof. Dr. **Dyck.**

Nr. 6.

Die den regulären Polyedern entsprechenden regulären Gebietseinteilungen auf der Kugel.

Die Modelle geben:

a. den **Tetraedertypus** (Einteilung in 24 Dreiecke mit den Winkeln $\left.\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$;

b. den **Oktaedertypus** (Einteilung in 48 abwechselnd congruente und symmetrische Dreiecke mit den Winkeln $\left.\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$;

c. den **Ikosaedertypus** (Einteilung in 120 abwechselnd congruente und symmetrische Dreiecke mit den Winkeln $\left.\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right)$.

Indem wir bezüglich der gruppentheoretischen und functionentheoretischen Bedeutung der Modelle auf F. Klein's „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade", sowie die dort genannte einschlägige Literatur verweisen, seien hier die folgenden fundamentalen Formeln zusammengestellt:

1) Tabelle der linearen Substitutionen der complexen Veränderlichen z, durch welche die Gebietseinteilungen in sich übergeführt werden.

a. Tetraedergruppe:

$$z' = \pm z,\ \pm\frac{1}{z},\ \pm i\,\frac{z+1}{z-1},\ \pm i\,\frac{z-1}{z+1},\ \pm\frac{z+i}{z-i},\ \pm\frac{z-i}{z+i}.$$

Darmstadt.

ächen

eines Umdreh- und zweier

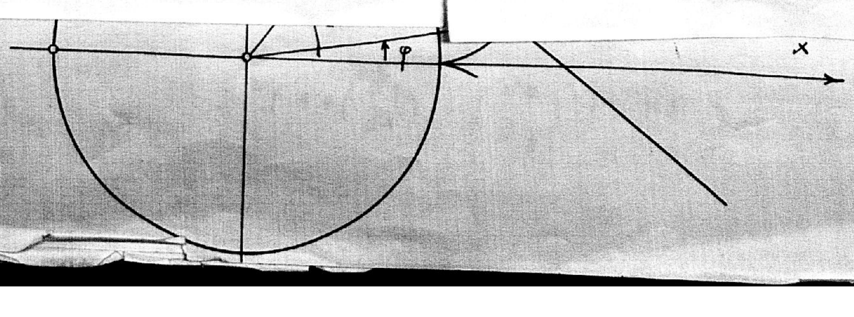
te Ebenen begrenzt ist,
linders durch Drahtringe
Abständen eine Anzahl
en) Ring in horizontaler
ängen sich vertikal zum

llen sich die Fäden zur
len bilden dann ein ein-
ne ganze Schaar solcher
er Halbumdrehung).
Umdreh-Hyperboloiden
zweier gleich grossen
nabhängig vom anderen,
lie beiden oberen Ringe
ht drehen, sondern nur
gezogen sind, werden
dasselbe Hyperboloid,

inem Knoten zusammen-
en zu können. Befestigt
man den unteren Theil
en.
Klammern das Modell
Fäden lässt sich durch

ein solches Aushängen sofort wieder Ordnung schaffen. Will man das Modell platt hinlegen, so empfiehlt sich, um Wirrungen zu vermeiden, es erst zum Kegel zusammenzudrehen.

Nr. 2. Wenn man eine Sinuslinie so auf einen Kreiscylinder aufwickelt, dass sie sich nach zwei vollen Wellen schliesst, so erhält man eine Raumkurve vierter Ordnung, die gleichzeitig auf einem ganzen Büschel von Flächen zweiter Ordnung liegt, und unter diesen Flächen sind ausser dem Kreiscylinder noch zwei parabolische Cylinder, die so liegen, dass ihre Scheitelerzeugenden einander senkrecht kreuzen und die Axe des Kreiscylinders



320

Punkt wenigstens
der Kurve konst
ist ferner ein M
Abstande von 12
überliegende Mar
Alles nähere wol
S. 67 ff., „Die Th
wird den Modell

Die Kurve
bezeichnen:

Modell N
als der K-Kurve

Modell N

Modell N

Modell N

Modell N

Modelle
kleiner oder grö

Modelle
knickter Basis, d

Modell N

Modell N

Modell N
(vgl. Fig. 5).

Modell N

Modell N
bestehenden K-

Gipsmo

Diese Zen
die bisher unte
4 Oktanten wie
der 4 Schalen
Koordinaten ein
Urfläche, so wir

$$\zeta = z + \frac{m + \sqrt{m^2 - n}}{z},$$

420 542

b. Oktaedergruppe:

$$z' = i^k z,\ \frac{i^k}{z},\ i^k\frac{z+1}{z-1},\ i^k\frac{z-1}{z+1},\ i^k\cdot\frac{z+i}{z-i},\ i^k\frac{z-i}{z+i}.$$

$$(k = 0, 1, 2, 3).$$

c. Ikosaedergruppe:

$$z' = \varepsilon^\mu z,\quad \frac{-\varepsilon^{4\mu}}{z},$$

$$\varepsilon^\nu \cdot \frac{-(\varepsilon - \varepsilon^4)\varepsilon^\mu z + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\varepsilon^\mu z + (\varepsilon - \varepsilon^4)},$$

$$-\varepsilon^{4\nu} \cdot \frac{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\varepsilon^\mu \cdot z + (\varepsilon - \varepsilon^4)}{-(\varepsilon - \varepsilon^4)\varepsilon^\mu z + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}.$$

$$\left(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}},\ \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4\right).$$

Die Variable z ist dabei in einer Aequatorebene der Kugel gedeutet, auf welche die reguläre Einteilung der Kugel durch stereographische Projection vom Nordpol aus übertragen ist. Die specielle Stellung dieser Ebene zur Gebietseinteilung ist dabei aus den gewählten Formeln leicht abzulesen.

2) Formenkreis der regulären Körper.

(In homogenen Coordinaten z_1, z_2 geschrieben).

a. Für das Tetraeder:

$$\Phi = z_1^4 + 2\sqrt{-3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4,$$

$$\Psi = z_1^4 - 2\sqrt{-3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4,$$

wobei

$$t = z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4),$$

ist.

$$12\sqrt{-3}\,.\,t^2 - \Phi^3 + \Psi^3 = 0$$

b. Für das Oktaeder:

$$t = z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4),$$

$$W = z_1^8 + 14 z_1^4 z_2^4 + z_2^8,$$

$$\chi = z_1^{12} + 33 z_1^8 z_2^4 - 33 z_1^4 z_2^8 + z_2^{12},$$

wobei die Relation:

$$108\, t^4 - W^3 + \chi^2 = 0$$

statthat.

c. Für das Ikosaeder:

$$f = z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10}),$$

$$H = -(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228 (z_1^{15} z_2^5 - z_1^5 z_2^{15}) - 494 z_1^{10} z_2^{10},$$

$$T = (z_1^{30} + z_2^{30}) + 522 (z_1^{25} z_2^5 - z_1^5 z_2^{25}) - 10\,005 (z_1^{20} z_2^{10} + z_1^{10} z_2^{20})$$

mit der Relation:

$$T^2 + H^3 - 1728 f^5 = 0.$$

3) Conforme Abbildung der Dreiecke der regulären Gebietseinteilung auf die positive bezw. negative Halbebene.

Durch die Gleichungen:

$$\text{a. } Z:Z-1:1=\Psi^3:-12\sqrt{-3}\,t^2:\Phi^3,$$

$$\text{b. } Z:Z-1:1=W^3:\chi^2:108\,t^4,$$

$$\text{c. } Z:Z-1:1=H^3:-T^2:1728\,f^5$$

werden die Kreisbogendreiecke der Tetraeder-, bezw. Oktaeder-, bezw. Ikosaeder-Einteilung auf die positive bezw. negative Halbebene Z abgebildet. Den Punkten $Z=0$, $Z=1$, $Z=\infty$ entsprechen dabei die Seitenmitten, Kantenmitten, Eckpunkte der auf die Kugel projicirten regulären Körper.

---

1 Darmstadt.

ächen

eines Umdreh- und zweier

te Ebenen begrenzt ist,
linders durch Drahtringe
Abständen eine Anzahl
en) Ring in horizontaler
ängen sich vertikal zum
llen sich die Fäden zur
len bilden dann ein ein-
ne ganze Schaar solcher
er Halbumdrehung).
Umdreh-Hyperboloiden
zweier gleich grossen
unabhängig vom anderen,
die beiden oberen Ringe
ht drehen, sondern nur
gezogen sind, werden
dasselbe Hyperboloid,

nem Knoten zusammen-
en zu können. Befestigt
man den unteren Theil
en.
Klammern das Modell
Fäden lässt sich durch

ein solches Aushängen sofort wieder Ordnung schaffen. Will man das Modell platt hinlegen, so empfiehlt sich, um Wirrungen zu vermeiden, es erst zum Kegel zusammenzudrehen.

Nr. 2. Wenn man eine Sinuslinie so auf einen Kreiscylinder aufwickelt, dass sie sich nach zwei vollen Wellen schliesst, so erhält man eine Raumkurve vierter Ordnung, die gleichzeitig auf einem ganzen Büschel von Flächen zweiter Ordnung liegt, und unter diesen Flächen sind ausser dem Kreiscylinder noch zwei parabolische Cylinder, die so liegen, dass ihre Scheitelerzeugenden einander senkrecht kreuzen und die Axe des Kreiscylinders