537 555 628

Darmstadt.

Mathematische Modelle

angefertigt

im mathematischen Institut der k. technischen Hochschule zu München.

(Zu Serie XVII.)

Modelle zur Functionentheorie

angefertigt

auf Veranlassung von Prof. Dr. Dyck.

Nr. 5.

Orthogonalsysteme auf der Kugel

ausgeführt (1891) von Assistent *J. Kleiber*.

Die Modelle geben quadratische Einteilungen auf der Kugel

a. und b. durch zwei Kreissysteme mit zwei getrennten bezw. zwei zusammenfallenden Polen,

b. durch zwei Schaaren von Loxodromen.

Es bezeichnen x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des Raumes, und es sei

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

die im Modell dargestellte Kugel. Im Modell ist speciell als Radius (Maasseinheit) 7,5 cm gewählt. Es seien ferner ξ, η die rechtwinkligen Coordinaten in der Tangentialebene $z = -1$ der Kugel, so gelten für die stereographische Abbildung der Kugel auf diese Tangentialebene vom Punkte $z = +1$ aus bekanntlich die Formeln:

$$x = \frac{4\xi}{\xi^2+\eta^2+4},\quad y = \frac{4\eta}{\xi^2+\eta^2+4},\quad z = \frac{\xi^2+\eta^2-4}{\xi^2+\eta^2+4};$$

$$\xi = \frac{2x}{1-z},\quad \eta = \frac{2y}{1-z}.$$

Wir stellen im folgenden die Formeln für die stereographische Abbildung der drei in den Modellen dargestellten Kurvensysteme auf die ξ, η-Ebene zusammen:

ächen

eines Umdreh- und zweier

te Ebenen begrenzt ist, linders durch Drahtringe Abständen eine Anzahl m) Ring in horizontaler ängen sich vertikal zum

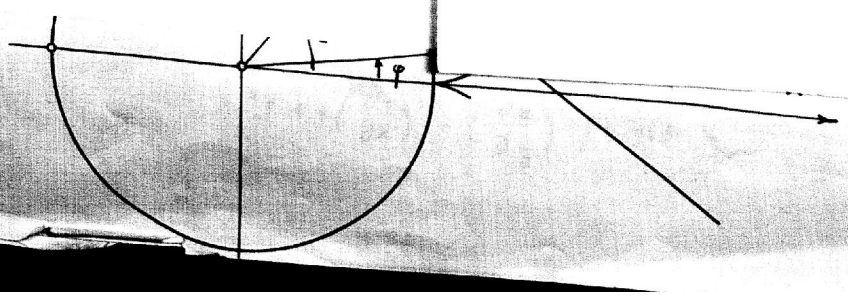
llen sich die Fäden zur en bilden dann ein ein- ie ganze Schaar solcher er Halbumdrehung). Umdreh-Hyperboloiden zweier gleich grossen ıabhängig vom anderen, ie beiden oberen Ringe ıt drehen, sondern nur gezogen sind, werden lasselbe Hyperboloid,

nem Knoten zusammen- ın zu können. Befestigt man den unteren Theil en.

Klammern das Modell Fäden lässt sich durch

ein solches Aushängen sofort wieder Ordnung schaffen. Will man [illegible] um Wirrungen zu vermeiden, es erst zum Kegel zusammenzudrehen. negen, so empfiehlt sich,

Nr. 2. Wenn man eine Sinuslinie so auf einen Kreiscylinder aufwickelt, dass sie sich nach zwei vollen Wellen schliesst, so erhält man eine Raumkurve vierter Ordnung, die gleichzeitig auf einem ganzen Büschel von Flächen zweiter Ordnung liegt, und unter diesen Flächen sind ausser dem Kreiscylinder noch zwei parabolische Cylinder, die so liegen, dass ihre Scheitelerzeugenden einander senkrecht kreuzen und die Axe des Kreiscylinders



Punkt wenigstens
der Kurve konst
ist ferner ein M
Abstande von 12
überliegende Mar
Alles nähere wol
S. 67 ff., „Die Th
wird den Modell

Die Kurve
bezeichnen:

Modell N
als der K-Kurve
Modell N
Modell N
Modell N
Modell N
Modell N
Modelle
kleiner oder grö
Modelle
knickter Basis, d
Modell N
Modell N
Modell N
(vgl. Fig. 5).
Modell N
Modell N
bestehenden K-F

Gipsmo

Diese Zen
die bisher unter
4 Oktanten wie
der 4 Schalen d
Koordinaten ein
Urfläche, so wir

2

a. Für das quadratische Netz der Kreise mit getrennten Polen kann man dann in der stereographischen Projection auf die ξ, η-Ebene die Gleichungen ansetzen:

$$1)\ \xi^2+\eta^2-\tfrac{4}{3}\eta\mu-\tfrac{4}{9}=0,$$
$$2)\ \xi^2+\eta^2-\tfrac{4}{3}\xi\nu+\tfrac{4}{9}=0,$$

wobei diese Gleichungen in Einheiten des Kugelradius geschrieben sind und μ bezw. ν die Parameter der einzelnen Kreise bezeichnen.

Setzt man nun:

$$\xi+i\eta=\tfrac{2}{3}\frac{1+e^{u+iv}}{1-e^{u+iv}},$$

so wird die Ebene ξ, η so auf eine neue Ebene u, v abgebildet, dass die Kreise des ersten Systems in die Geraden $v=$ const., die Kreise des zweiten Systems in $u=$ const. übergehen; es folgt nämlich:

$$1')\ \mu=\operatorname{ctg} v,$$
$$2')\ \nu=\frac{1+e^{2u}}{1-e^{2u}}.$$

Wählt man nunmehr

$$u=\frac{\pi}{m}\cdot p \quad p=0,\ 1\ldots m-1\,|\,m\ldots,$$
$$v=\frac{\pi}{m}\cdot q \quad q=0,\ 1\ldots m-1\,|\,m\ldots,$$

so bilden die Geraden ein quadratisches Netz; dasselbe hat speciell für ganzzahliges m die Eigenschaft, dass das erste System (1') für $p=0,$ $1\ldots m-1$ gerade m Kreise (1) liefert, welche sich unter Winkeln $\frac{\pi}{m}$ durchsetzen und die Ebene ξ, η einfach überdecken; die Kreise werden dann (für $p=m, m+1\ldots$) reproduzirt. Die Zahl der Kreise des zweiten Systems ist selbstverständlich unbegrenzt.

Im Falle des Modells ist $m=10$ gewählt.

b. Für das quadratische Netz der Kreise mit zusammenfallenden Polen sind die Kreise eingezeichnet, welche unmittelbar den Geraden

$$1)\ \xi=\mu,$$
$$2)\ \eta=\mu$$

der Ebene ξ, η in ihrer stereographischen Projection auf die Kugel entsprechen.

Dabei sind im Modell speciell die Kreise für

$$\mu=0, \pm\tfrac{3}{5}, \pm\tfrac{6}{5}, \ldots \pm\tfrac{36}{5}$$

(in Einheiten des Kugelradius geschrieben) eingezeichnet.

$$\xi=z+\frac{m+\sqrt{m^2-n}}{z},$$

539 555 628

Darmstadt.

c. Das quadratische Netz der Loxodromen auf der Kugel wird erhalten durch die stereographische Projection eines Systems von logarithmischen Spiralen:

$$1)\ \varrho = 2\,e^{\varkappa(\varphi+\mu)},$$

$$2)\ \varrho = 2\,e^{-\frac{1}{\varkappa}(\varphi+\nu)},$$

in der Ebene ξ, η (wobei ϱ, φ die Polarcoordinaten dieser Ebene, μ, ν die Parameter des Systems bezeichnen). Setzt man hier

$$\xi + i\eta = 2\,e^{u+iv},$$

$$\text{also } \varrho = 2\,e^{u},$$

$$\varphi = v,$$

so wird diese Ebene so auf die neue Ebene u, v abgebildet, dass der zwischen den Parallelen $v = 0$ und $v = 2\pi$ befindliche Streifen der längs der positiven ξ-Axe aufgeschnittenen Ebene ξ, η entspricht.

Es geht dabei das System der logarithmischen Spiralen über in das Orthogonalsystem der Geraden:

$$1')\ u - \varkappa v - \varkappa\mu = 0,$$

$$2')\ \varkappa u + v + \nu = 0.$$

Das gewünschte Netz ist also quadratisch für:

$$\varkappa\mu = -\nu.$$

Soll das erste System aus m Spiralen bestehen, so ist

$$\mu = \frac{2\pi}{m}\cdot p \quad p = 0, 1, \ldots m-1 \mid m \ldots$$

zu setzen; und es folgt weiter

$$\nu = \frac{2\pi}{\varkappa m}\cdot p,$$

sodass, wenn sich das Netz mit einmaliger Bedeckung der Ebene (ξ, η) schliessen soll, $\varkappa$ ganzzahlig zu wählen ist. Im Modell ist

$$\varkappa = 2, \quad m = 10$$

angenommen, woraus für die Zahl der Spiralen des zweiten Systems $n = 20$ folgt. Die Gleichungen für den im Modell dargestellten Fall lauten also:

$$1'')\ \varrho = 2\,e^{2(\varphi+\frac{2\pi}{10}p)},$$

$$2'')\ \varrho = 2\,e^{-\frac{1}{2}(\varphi-\frac{2\pi}{20}p)}.$$

ächen

eines Umdreh- und zweier

te Ebenen begrenzt ist,
linders durch Drahtringe
Abständen eine Anzahl
en) Ring in horizontaler
ängen sich vertikal zum

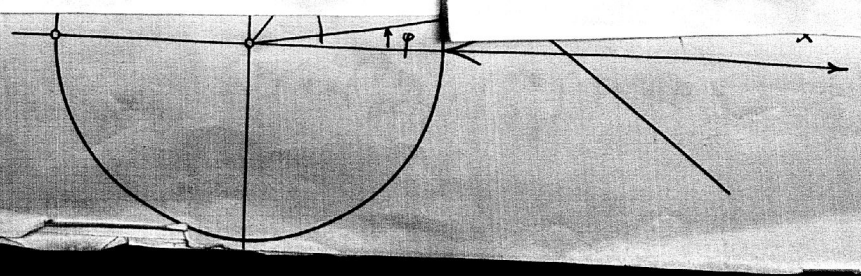
llen sich die Fäden zur
len bilden dann ein ein-
ne ganze Schaar solcher
er Halbumdrehung).
Umdreh-Hyperboloiden
1 zweier gleich grossen
nabhängig vom anderen,
die beiden oberen Ringe
ht drehen, sondern nur
gezogen sind, werden
dasselbe Hyperboloid,

inem Knoten zusammen-
en zu können. Befestigt
man den unteren Theil
en.

Klammern das Modell
Fäden lässt sich durch

ein solches Anhängen sofort wieder Ordnung schaffen. Will man das Modell platt hinlegen, so empfiehlt sich, um Wirrungen zu vermeiden, es erst zum Kegel zusammenzudrehen.

Nr. 2. Wenn man eine Sinuslinie so auf einen Kreiscylinder aufwickelt, dass sie sich nach zwei vollen Wellen schliesst, so erhält man eine Raumkurve vierter Ordnung, die gleichzeitig auf einem ganzen Büschel von Flächen zweiter Ordnung liegt, und unter diesen Flächen sind ausser dem Kreiscylinder noch zwei parabolische Cylinder, die so liegen, dass ihre Scheitelerzeugenden einander senkrecht kreuzen und die Axe des Kreiscylinders



Punkt wenigstens
der Kurve konst
ist ferner ein M
Abstande von 12
überliegende Mar
Alles nähere wol
S. 67 ff., „Die Th
wird den Modell

Die Kurve
bezeichnen:

Modell N
als der *K*-Kurve

Modell N
Modell N
Modell N
Modell N
Modell N
Modelle
kleiner oder grö

Modelle
knickter Basis, d

Modell N
Modell N
Modell N
(vgl. Fig. 5).

Modell N
Modell N
bestehenden *K*-F

Gipsmo

Diese Zen
die bisher unter
4 Oktanten wie
der 4 Schalen d
Koordinaten ein
Urfläche, so wir

$$\zeta = z + \frac{m + \sqrt{m^2 - n}}{z},$$

541 555 623

Darmstadt.

Prof. F. Klein

Mathematische Modelle

angefertigt

im mathematischen Institut der k. technischen Hochschule zu München.

(Zu Serie XVII.)

Modelle zur Functionentheorie ächen

angefertigt

auf Veranlassung von Prof. Dr. Dyck.

Nr. 6.

Die den regulären Polyedern entsprechenden regulären Gebietseinteilungen auf der Kugel.

Die Modelle geben:

a. den **Tetraedertypus** (Einteilung in 24 Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$);

b. den **Oktaedertypus** (Einteilung in 48 abwechselnd congruente und symmetrische Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$);

c. den **Ikosaedertypus** (Einteilung in 120 abwechselnd congruente und symmetrische Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$).

Indem wir bezüglich der gruppentheoretischen und functionentheoretischen Bedeutung der Modelle auf F. Klein's „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade", sowie die dort genannte einschlägige Literatur verweisen, seien hier die folgenden fundamentalen Formeln zusammengestellt:

1) Tabelle der linearen Substitutionen der complexen Veränderlichen z, durch welche die Gebietseinteilungen in sich übergeführt werden.

a. Tetraedergruppe:

$$z' = \pm z,\ \pm\frac{1}{z},\ \pm i\frac{z+1}{z-1},\ \pm i\frac{z-1}{z+1},\ \pm\frac{z+i}{z-i},\ \pm\frac{z-i}{z+i}.$$

eines Umdreh- und zweier

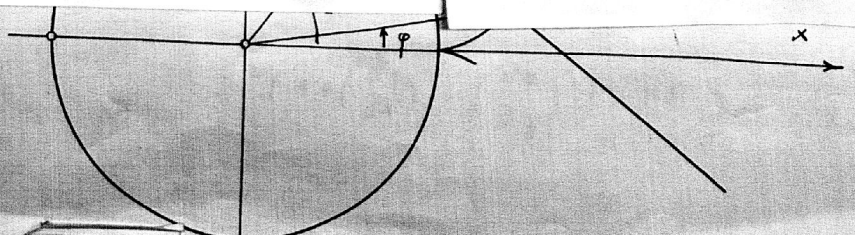
te Ebenen begrenzt ist,
linders durch Drahtringe
Abständen eine Anzahl
en) Ring in horizontaler
ängen sich vertikal zum

llen sich die Fäden zur
len bilden dann ein ein-
ne ganze Schaar solcher
er Halbumdrehung).
Umdreh-Hyperboloiden
zweier gleich grossen
nabhängig vom anderen,
die beiden oberen Ringe
ht drehen, sondern nur
gezogen sind, werden
dasselbe Hyperboloid,

inem Knoten zusammen-
en zu können. Befestigt
man den unteren Theil
en.
Klammern das Modell
Fäden lässt sich durch

ein solches Aushängen sofort wieder Ordnung schaffen. Will man das Modell platt hinlegen, so empfiehlt sich, um Wirrungen zu vermeiden, es erst zum Kegel zusammenzudrehen.

Nr. 2. Wenn man eine Sinuslinie so auf einen Kreiscylinder aufwickelt, dass sie sich nach zwei vollen Wellen schliesst, so erhält man eine Raumkurve vierter Ordnung, die gleichzeitig auf einem ganzen Büschel von Flächen zweiter Ordnung liegt, und unter diesen Flächen sind ausser dem Kreiscylinder noch zwei parabolische Cylinder, die so liegen, dass ihre Scheitelerzeugenden einander senkrecht kreuzen und die Axe des Kreiscylinders



Punkt wenigstens
der Kurve konst
ist ferner ein M
Abstande von 12
überliegende Mar
Alles nähere wol
S. 67 ff., „Die Th
wird den Modell

Die Kurve
bezeichnen:

Modell N
als der K-Kurve

Modell N
Modell N
Modell N
Modell N
Modell N
Modelle
kleiner oder grö

Modelle
knickter Basis, d

Modell N
Modell N
Modell N
(vgl. Fig. 5).

Modell N
Modell N
bestehenden K-I

Gipsmo

Diese Zen
die bisher unte
4 Oktanten wie
der 4 Schalen
Koordinaten ein
Urfläche, so wir

b. Oktaedergruppe:

$$z' = i^k z,\ \frac{i^k}{z},\ i^k \frac{z+1}{z-1},\ i^k \frac{z-1}{z+1},\ i^k \cdot \frac{z+i}{z-i},\ i^k \frac{z-i}{z+i}.$$

$(k = 0, 1, 2, 3).$

c. Ikosaedergruppe:

$$z' = \varepsilon^\mu z,\ \frac{-\varepsilon^{4\mu}}{z},$$

$$\varepsilon^\nu \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\,\varepsilon^\mu z + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\,\varepsilon^\mu z + (\varepsilon-\varepsilon^4)},$$

$$-\varepsilon^{4\nu} \cdot \frac{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\,\varepsilon^\mu \cdot z + (\varepsilon-\varepsilon^4)}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\,\varepsilon^\mu z + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)}.$$

$(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}},\ \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4).$

Die Variable z ist dabei in einer Aequatorebene der Kugel gedeutet, auf welche die reguläre Einteilung der Kugel durch stereographische Projection vom Nordpol aus übertragen ist. Die specielle Stellung dieser Ebene zur Gebietseinteilung ist dabei aus den gewählten Formeln leicht abzulesen.

2) Formenkreis der regulären Körper.

(In homogenen Coordinaten z_1, z_2 geschrieben).

a. Für das Tetraeder:

$$\Phi = z_1^4 + 2\sqrt{-3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4,$$
$$\Psi = z_1^4 - 2\sqrt{-3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4,$$

wobei
$$t = z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4),$$

ist.
$$12\sqrt{-3}\, t^2 - \Phi^3 + \Psi^3 = 0$$

b. Für das Oktaeder:

$$t = z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4),$$
$$W = z_1^8 + 14 z_1^4 z_2^4 + z_2^8,$$
$$\chi = z_1^{12} + 33 z_1^8 z_2^4 - 33 z_1^4 z_2^8 + z_2^{12},$$

wobei die Relation:

statthat.
$$108\, t^4 - W^3 + \chi^2 = 0$$

c. Für das Ikosaeder:

$$f = z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10}),$$
$$H = -(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228 (z_1^{15} z_2^5 - z_1^5 z_2^{15}) - 494 z_1^{10} z_2^{10},$$
$$T = (z_1^{30} + z_2^{30}) + 522 (z_1^{25} z_2^5 - z_1^5 z_2^{25}) - 10005 (z_1^{20} z_2^{10} + z_1^{10} z_2^{20})$$

mit der Relation:

$$T^2 + H^3 - 1728 f^5 = 0.$$

$$\zeta = z + \frac{m + \sqrt{m^2 - n}}{z},$$

543 555 623

3

Darmstadt.

3) Conforme Abbildung der Dreiecke der regulären Gebietseinteilung auf die positive bezw. negative Halbebene.

Durch die Gleichungen:

a. $Z : Z - 1 : 1 = \Psi^3 : -12\sqrt{-3}\, t^2 : \Phi^3$,

b. $Z : Z - 1 : 1 = W^3 : \chi^2 : 108\, t^4$,

c. $Z : Z - 1 : 1 = H^3 : -T^2 : 1728\, f^5$

werden die Kreisbogendreiecke der Tetraeder-, bezw. Oktaeder-, bezw. Ikosaeder-Einteilung auf die positive bezw. negative Halbebene Z abgebildet. Den Punkten $Z = 0$, $Z = 1$, $Z = \infty$ entsprechen dabei die Seitenmitten, Kantenmitten, Eckpunkte der auf die Kugel projicirten regulären Körper.

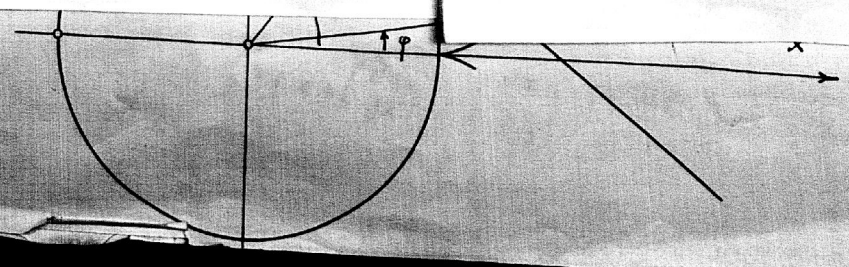
ächen

eines Umdreh- und zweier

te Ebenen begrenzt ist,
linders durch Drahtringe
Abständen eine Anzahl
en) Ring in horizontaler
ängen sich vertikal zum

llen sich die Fäden zur
len bilden dann ein ein-
ne ganze Schaar solcher
er Halbumdrehung).
Umdreh-Hyperboloiden
zweier gleich grossen
nabhängig vom anderen,
lie beiden oberen Ringe
ht drehen, sondern nur
gezogen sind, werden
dasselbe Hyperboloid,

nem Knoten zusammen-
en zu können. Befestigt
man den unteren Theil
en.
Klammern das Modell
Fäden lässt sich durch

ein solches Aushängen sofort wieder Ordnung schaffen. Will man das Modell platt hinlegen, so empfiehlt sich, um Wirrungen zu vermeiden, es erst zum Kegel zusammenzudrehen.

Nr. 2. Wenn man eine Sinuslinie so auf einen Kreiscylinder aufwickelt, dass sie sich nach zwei vollen Wellen schliesst, so erhält man eine Raumkurve vierter Ordnung, die gleichzeitig auf einem ganzen Büschel von Flächen zweiter Ordnung liegt, und unter diesen Flächen sind ausser dem Kreiscylinder noch zwei parabolische Cylinder, die so liegen, dass ihre Scheitelerzeugenden einander senkrecht kreuzen und die Axe des Kreiscylinders