557 561 (2) 569 623

Vier Modelle
zur Theorie der Linien-Complexe zweiten Grades.

Ausgeführt
(nach Angaben von Dr. F. Klein in Göttingen)
von

Joh. Eigel Sohn,
Mechanische Werkstätte
Cöln a. Rh.

In der Liniengeometrie *) bestimmt man die gerade Linie im Raume durch 4 Coordinaten, für welche man die 4 Constanten r, s, ρ, σ nehmen kann, die in der Gleichung ihrer Projectionen vorkommen:

$$x = rz + \rho.$$
$$y = sz + \sigma.$$

Einer Gleichung zwischen r, s, ρ, σ:

$$f(r, s, \rho, \sigma) = 0$$

genügen nur noch die Coordinaten gewisser Linien, deren gemeinsame Eigenthümlichkeit eben durch diese Gleichung ausgesprochen wird. Derartige Mannigfaltigkeiten von Geraden, die aus der Gesammtheit aller Geraden durch eine Gleichung ausgeschieden werden, bezeichnet man, nach **Plücker**, als **Linien-Complexe.** Die geometrische Vorstellung eines solchen Linien-Complexes wird dadurch schwierig, weil die unendlich vielen Linien, welche ihn constituiren, den Raum vollständig ausfüllen, weil also das vorzustellende Gebilde keine Gestalt hat. Um so mehr ist es wünschenswerth, Modelle zu besitzen, welche der geometrischen Anschauung zu Hülfe kommen. Die vorliegenden Flächen-Modelle sind in diesem Sinne für das Studium der Linien-Complexe zweiten Grades **) bestimmt. Aber abgesehen von diesem besonderen Zwecke

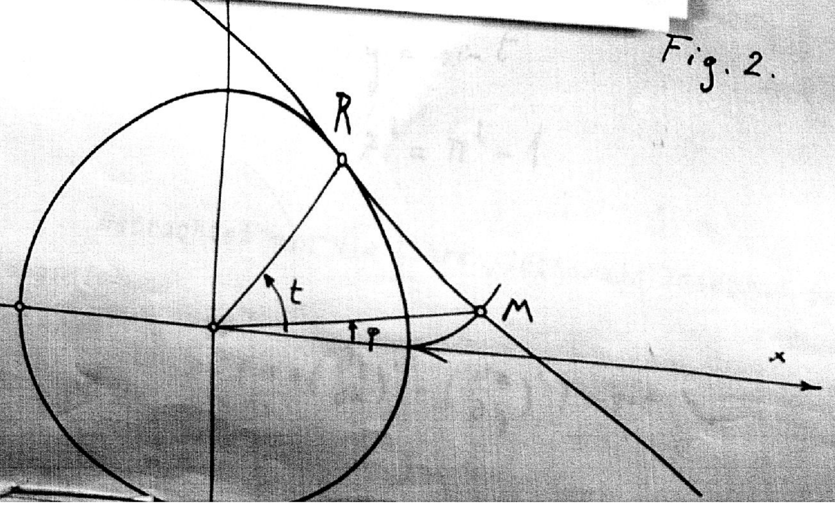
*) Vergl. **Plücker**, Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig, B. G. Teubner, 1868, 69.

**) Ein Linien-Complex heisst vom $n$ten Grade, wenn die ihn definirende Gleichung $f = 0$ in den Veränderlichen r, s, ρ, σ und der mit diesen gleichberechtigt auftretenden Verbindung $(r\sigma - s\rho)$ vom $n$ten Grade ist.

kehrkante.

Bewegung eines Krei-
s parallelen Ebene.
eugenden Kreise und
ur den Teil der Flä-
uf dem die Rückkehr-
liegt. Die bewegte
cheibe wird so an den
er Z herangebracht
ig.1), dass die Bahn
nen Endpunktes A ih-
rizontalen Durchmes-
AB die Zylinderflä-
nkrecht trifft; da-
an dem Zylinder ab (sc
ttelpunkt M läuft,
n den Zylinder trifft.
gewählt, dass
ers gleich 1 ist.
t aufzustellen. Wählt
n der in Figur 2 an-

Fig. 2.



2 320 556

558

bringen sie eine Reihe Eigenthümlichkeiten der höheren algebraischen Flächen zur Anschauung, von denen man ohne ein solches Hülfsmittel nur schwer eine Vorstellung gewinnen kann.

Für Linien-Complexe zweiten Grades gilt der Satz, dass die Geraden des Complexes, welche durch einen Punkt hindurchgehen, einen Kegel der zweiten Ordnung bilden, sowie, dass die Geraden des Complexes, welche in einer Ebene liegen, eine Curve der zweiten Classe, einen Kegelschnitt, umhüllen. *Plücker* untersucht nun insbesondere *) diejenige Fläche, die von den Complex-Kegelschnitten gebildet wird, die in den durch eine gegebene Gerade hindurchgelegten Ebenen liegen. Es ist dies dieselbe Fläche, die von den Complexkegeln umhüllt wird, die von den Punkten der gegebenen Geraden ausgehen. Diese Fläche, die sogenannte *allgemeine Complexfläche*, ist durch Modell I vorgestellt. Die allgemeine Complexfläche ist, wie sämmtliche vier modellirte Flächen, von der vierten Ordnung und der vierten Classe. Die gegebene Gerade ist eine Doppellinie derselben. Von jeder durch die Doppellinie hindurchgehenden Ebene wird die Fläche in einem Kegelschnitte geschnitten. Für vier besondere Lagen der schneidenden Ebene wird der Kegelschnitt eine doppeltzählende Gerade. Auf ihr befinden sich jedesmal zwei Punkte, welche Doppelpunkte der Fläche sind. So hat die Fläche im Ganzen 8 Doppelpunkte. Dieselben liegen 8 mal zu 4 in einer Ebene. Jede solche Ebene ist eine sogenannte Doppelebene der Fläche, d. h. eine Ebene, welche die Fläche nach der ganzen Erstreckung eines Kegelschnittes berührt. — Alle diese Eigenthümlichkeiten sind im Modelle deutlich zu übersehen; man vergl. dazu Plücker's Neue Geometrie, n. 168—179, n. 215—224.

Die Modelle II und III stellen die beiden wichtigsten Particularisationen der allgemeinen Complexfläche dar.

Im Modelle II gehört die gegebene Gerade, mit deren Hülfe die Fläche construirt wird, selbst dem Complexe an. Sie ist dann nicht mehr Doppellinie sondern Cuspidallinie der Fläche; jede Ebene schneidet die Fläche in einer Curve, welche auf der Geraden eine Spitze hat. Jede durch die Gerade hindurchgelegte Ebene enthält einen Kegelschnitt, welcher die Gerade berührt. Die Fläche besitzt jetzt 4 Knotenpunkte. Die 4 Ebenen, welche 3 derselben enthalten, berühren die Fläche nach einem Kegelschnitt. Vergl. Plücker's neue Geometrie n. 225—232.

Im Modelle III ist als gegebene Gerade eine der ausgezeichneten Complexlinien genommen worden, welche Plücker singuläre Linien nennt (Neue Geometrie, n. 300, n. 305—306). In jeder durch die Gerade hindurchgelegten Ebene liegt ein Kegelschnitt, der die Gerade in einem festen Punkte berührt. Die Fläche hat noch 2 Doppelpunkte und 2 Doppelebenen.

Modell IV endlich stellt die *Singularitätenfläche* des allgemeinen Complexes zweiten Grades dar. Die Singularitätenfläche ist der Ort solcher Punkte, deren Complexkegel in zwei Ebenen zerfällt, oder, was auf dasselbe hinaus-

*) Neue Geometrie. Abschnitt I und III der Theorie der Complexe zweiten Grades.

senkrecht treffen. Die Kurve hat i
Cylinder berühren, einen isolirten Do
Cylinder oder Kegel dem Büschel a
Das Modell Nr. 2 enthält d
verfertigten Rahmen gespannt sind.
sondern eine solche, die in der Ric

Nr. 3 u. 4. Die eben er
jenigen, die gleichzeitig für die pa
schneidende Symmetrieaxen, nämlic
gehen, das zwischen den beiden S
der Raumkurve mit einander verbund
spiegeln, so erhält man die beiden
welche symmetrisch zu einer der be
eines rechtwinkligen Parabo
Schaar desselben rechtwinkligen Pa
zweiter Ordnung.
Verbindet man endlich solc
eines Cylindroids (Plücker'schen
In den Modellen Nr. 3 und
so gebohrt ist, dass durch verschi
oder das Cylindroid (Nr. 4) entsteht.
Diese Flächen sind in zwei
Nr. 2 und b) in einer Gestalt, bei
auch im fünften Modell auftritt. In
Cylinder, der die Fläche in einer K
Jedem Modell ist ein Gestel

Nr. 5. Sind zwei windschi
1) alle Punkte, die von
2) alle Mittelebenen zwis
3) alle Geraden, die als
im einen oder anderen
und die beiden Schaar
Ist umgekehrt ein rechtwin
es in der angegebenen Weise hervo
lösbar. Man erhält nämlich alle Ge
den beiden sich senkrecht schneiden
Umdrehcylinder, der seine Axe in d
reinen Sinuslinie schneidet, so trifft
um einen rechten Winkel gegen eina
des Cylindroids mit denen des Paral
Das Modell Nr. 5 zeigt das
begrenzt durch zwei kongruente Ku

Bei Einzelbezug der Modelle kostet

Darmstadt, 1896.

Die Verlagshandlung

L. Brill.

559 561 (2) 569 622

kommt, sie wird umhüllt von allen Ebenen, deren Complexcurven in ein Punktepaar ausartet. (Neue Geometrie n. 312—323.) Es ist dies wieder eine Fläche vierter Ordnung und vierter Classe. Dieselbe besitzt 16 Doppelpunkte und 16 Doppelebenen. In jeder Doppelebene liegen 6 Doppelpunkte, durch jeden Doppelpunkt gehen 6 Doppelebenen. Es ist diese merkwürdige Fläche zuerst von Herrn *Kummer* untersucht worden, der sie als Verallgemeinerung der *Fresnel*'schen Wellenfläche auffand. *)

*) Monatsberichte der Berl. Akademie, 1864. Abhandlungen, 1866.

Steven's Druckerei, Cöln, Brüderstrasse 13.

kehrkante.

Bewegung eines Krei-
s parallelen Ebene.
eugenden Kreise und
ur den Teil der Flä-
uf dem die Rückkehr-
liegt. Die bewegte
cheibe wird so an den
er Z herangebracht
ig.1), dass die Bahn
nen Endpunktes A ih-
rizontalen Durchmes-
AB die Zylinderflä-
nkrecht trifft; da-
an dem Zylinder ab (sc
ttelpunkt M läuft,
n den Zylinder trifft.
gewählt, dass
lers gleich 1 ist.
t aufzustellen. Wählt
n der in Figur 2 an-

Fig. 2.