

I .

Allgemeine Grundlagen.(Vorträge ~~weiter~~ ^{Wimmer} von Koppenfels.)Disposition :

Historische Einleitung.

- I . Aufsuchen aller Flächen mit konformer sphärischer Abbildung. Definition der Minimalflächen.
- II. Krümmungslinien als Parameterlinien auf der Minimalfläche. (Doppelte konforme Abbildung auf die Ebene, Weierstrass'sche Formeln).
- III . Minimalkurven als Parameterlinien auf der Minimalfläche. (Imaginäre Schiebfläche, Weierstrass'sche Formeln).
- IV . Stützebenenfunktion ist Potentialfunktion. (Weierstrass'sche Formeln).

Historische Einleitung.

Es ist das Verdienst der Variationsrechnung, den ersten Anstoss zum Studium der Minimalflächen gegeben zu haben.
Das Variationsproblem:

$$\iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy = \text{Min.}$$

wobei zum Vergleich alle quadrierbaren Flächen zugelassen werden, die durch eine gegebene über dem Rand von G liegende Raumkurve laufen, führt sofort auf die Euler'sche Gleichung:

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0$$

die für diesen speziellen Fall zuerst von Lagrange aufgestellt worden ist. An Hand dieser Gleichung fand man sehr bald spezielle Minimalflächen. Meusnier (1776) entdeckte die beiden einfachsten, nämlich das Catenoid und die gewöhnliche Schraubenfläche. Diese beiden blieben aber ein halbes Jahrhundert lang die einzigen bekannten Minimalflächen. Wohl haben sich Monge und Legendre eingehend mit der Euler'schen Gleichung beschäftigt, aber man hat von ihren Resultaten keinen Gebrauch gemacht. Erst Schereh (1834) hat mit Erfolg weiter gesucht und alle Schraubenflächen, die Minimalflächen sind, gefunden. (Als Spezialfälle erhält er also die Meusnier'schen Flächen.) Einen grossen Fortschritt bedeuten die Arbeiten von Ossian Bonnet (1853), der es ermöglichte, alle reellen Minimalflächen aufzusuchen, und der weitgehende Untersuchungen anstellte über geometrische Eigenschaften, die allen Minimalflächen eigen sind.

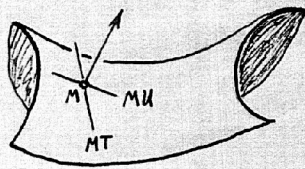
Die erfolgreichsten Untersuchungen verdanken wir aber Weierstrass (1866), der die eleganteste Form gefunden hat, in der sich alle reellen und algebraischen Minimalflächen darstellen lassen. Ihm gebührt das Verdienst, als erster das enge

Band gezeigt zu haben, das die Theorie der Minimalflächen mit der Funktionentheorie verbindet. Seine grundlegenden Formeln sollen im folgenden auf drei wesentlich verschiedene Arten abgeleitet werden. Nachdem Weierstrass den Bann gebrochen hatte, setzte eine grosse Zahl fruchtbarer Untersuchungen ein, von denen in erster Linie die schönen Arbeiten von Riemann und H.A. Schwarz zu nennen sind.

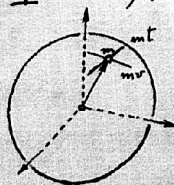
Die Hauptbedeutung der Theorie der Minimalflächen beruht auf ihrer engen Verbindung mit der Funktionentheorie, und diese Beziehungen gehen darauf zurück, dass sich die Minimalflächen durch parallele Normalen konform auf die Kugel abbilden lassen. Es erscheint daher zweckmässig, die Minimalflächen von dieser Seite her einzuführen.

I. Aufsuchen aller Flächen mit konformer sphärischer Abbildung. Definition der Minimalflächen.

Wir fragen nach allen Flächen, deren Abbildung durch parallele Normalen, oder kurz sphärische Abbildung, konform ist. Diese Abbildung ordnet den Flächenpunkten die Endpunkte ihrer von einem beliebigen Nullpunkt aus aufgetragenen Normalen-Einheitsvektoren zu. Jedem Flächenpunkt M entspricht auf diese Weise ein Punkt m der Einheitskugel, jeder Tangentenrichtung MT eine Tangentenrichtung mt im sphärischen Bildpunkt. Wenn wir die Änderung der Tangentialebene auf der Fläche längs einer Richtung MT betrachten, so wird in der Grenze durch den Schnitt zweier benachbarter Tangentialebenen im Flächenpunkt M eine zur Richtung MT "konjugierte" Richtung MU eindeutig definiert. Die zur sphärischen Bildtangente mt konjugierte Richtung mv muss zu MU parallel sein, da nach Definition die Tangentialebenen entsprechender Flächen- und Kugelpunkte immer parallel sind. Da nun auf der Kugel zwei konjugierte Richtungen stets aufeinander senkrecht stehen ($mt \perp mv$), so folgt $MU \perp mt$.



Dann: Flächenpunkt $\underline{M}$
 Flächentang. $\underline{MT}$
 konj. " " $\underline{MU}$



entspricht Kugelpunkt $\underline{m}$
 " Kugeltang. $\underline{mt}$
 ist parallel zu konj. Kugeltang. $\underline{mv}$

also

$$MU \perp mt.$$

Wir sehen also: Einer Flächentangente MT , deren konjugierte Richtung MU ist, entspricht bei der Abbildung eine Kugeltangente mt , die senkrecht zu MU ist. Für ein Tangentenpaar MT, MT' gilt also:

$$\angle(MU, MU') = \angle(mt, mt')$$

Unsere Forderung, dass die Abbildung konform ist (d.h. $\angle(MT, MT') = \angle(mt, mt')$) ist also äquivalent mit der Forderung, dass die Winkel zweier beliebiger Tangentenrichtungen im Flächenpunkt gleich dem Winkel der zu ihnen konjugierten Richtungen ist. Da in einem nicht parabolischen Flächenpunkt konjugierte Richtungen mit konjugierten Durchmesser~~n~~ des Indikatrix-Kegelschnittes übereinstimmen, so bedeutet dies, dass die Indikatrix entweder ein Kreis oder eine gleichseitige Hyperbel ist.¹⁾

Wir können das Resultat auch so aussprechen: Notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit der Konformität der Abbildung unserer Fläche durch parallele Normale auf die Einheitskugel ist, dass die Summe oder Differenz der beiden Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 verschwindet. Ist $R_1 = R_2$, so sind in jedem Flächenpunkt alle Krümmungsradien gleich, jeder Punkt ist Nabelpunkt. Die einzige Fläche mit dieser Eigenschaft ist die Kugel. Ist $R_1 = -R_2$, so nennen wir die Fläche eine Minimalfläche.

als Grenzfall beider Flächentypen erhalten wir für unendlich grosse Krümmungsradien die Ebene. Sie ist also gleichzeitig Kugel und Minimalfläche.

1) Die Richtungsbedingung, der zwei konjugierte Durchmesser eines Kegelschnitts mit den Hauptachsen a und b genügen müssen, ist $\tan \alpha \tan \beta = -\frac{b^2}{a^2}$. Der Winkel zwischen zwei Durchmessern ist gleich dem ihrer konjugierten, wenn

$$\tan \alpha \tan \beta = \pm 1 \quad \text{ist.}$$

II. Krümmungslinien als Parameterlinien auf der Minimalfläche.

Da wir die Minimalflächen dadurch definiert haben, dass in jedem ihrer Punkte die Hauptkrümmungsradien entgegengesetzt gleich sind, liegt es nahe, bei ihrem Studium die Krümmungslinien als Parameterlinien zu wählen. Wir wollen zunächst zeigen, dass diese auf der Minimalfläche ein isothermes Netz bilden.

Bedenkt man, dass längs einer Krümmungslinie die Normalen eine abwickelbare Fläche bilden, also eine Raumkurve umhüllen, so erhält man folgende Beziehung, die zwischen einem Hauptkrümmungsradius und den Differentialen des Ortsvektors ζ und des Normaleneinheitsvektors ξ besteht:

$$(1) \quad d\zeta + R d\xi = 0$$

Diese Formel, die von Olinde Rodrigues herrührt, gilt allgemein für jede Fläche. Wählen wir die Krümmungslinien als Parameterlinien ($p = \text{const}, q = \text{const}$), so bedeutet dies:

$$\zeta_p + R_1 \xi_p = 0$$

$$\zeta_q + R_2 \xi_q = 0$$

Hieraus folgt:

$$d\zeta = -R_1 \xi_p dp - R_2 \xi_q dq$$

Also gilt für Minimalflächen ($R_2 = -R_1 = R$):

$$(2) \quad d\zeta = R(\xi_p dp - \xi_q dq)$$

$$(3) \quad d\zeta^2 = R^2(E dp^2 + G dq^2) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \xi_p^2 \\ F = \xi_p \xi_q = 0 \\ G = \xi_q^2 \end{array} \right.$$

$$(4) \quad d\zeta^2 = R^2 d\xi^2$$

($F = 0$, weil die Krümmungslinien eo ipso ein orthogonales Netz bilden.)

Wir finden in Formel (4) eine erneute Bestätigung dafür, dass die sphärische Abbildung konform ist.

Aus der Integrabilitätsbedingung für dy (vgl. (2)):

$$(R\xi_p)_q + (R\xi_q)_p = 0$$

folgt

$$(RE)_q = 0 \quad (RG)_p = 0$$

Also können wir neue Variable p_1 und q_1 folgendermassen einführen:

$$\begin{aligned} dp_1 &= \sqrt{RE} \, dp \\ dq_1 &= \sqrt{RG} \, dq \end{aligned} \quad \left(\text{also } E_1 = G_1 = \frac{1}{R} \right)$$

Die Formel (2) bleibt in den neuen Koordinaten unverändert erhalten:

$$(5) \quad dy = R (\xi_{p_1} dp_1 - \xi_{q_1} dq_1)$$

Aus (3) hingegen wird:

$$(6) \quad dy^2 = R (dp_1^2 + dq_1^2) = R^2 d\xi^2$$

Damit ist gezeigt, dass die Krümmungslinie_n auf der Minimalfläche ein isothermes Netz bilden.

Wir können also die Minimalfläche konform auf die Ebene abbilden, wobei den beiden Kurvenscharen $p_1 = \text{const}$ und $q_1 = \text{const}$ zwei orthogonale Geradenscharen entsprechen. Jede isogonale Trajektorie auf der Fläche bildet sich also in eine Gerade der p_1, q_1 -Ebene ab. Insbesondere geht das System der Haupttangentialkurven auf der Fläche in ein zum Koordinatennetz der p_1, q_1 -Ebene um 45° gedrehtes orthogonales Netz über. Es ist für das folgen-

de zweckmässig, die $p_1 q_1$ -Ebene als komplexe Ebene der Variablen $G = p_1 + i q_1$ (bezw. der konjugierten $\tau = p_1 - i q_1$) aufzufassen. Dann wird:

$$(7) \quad \underline{dy^2 = R d\sigma d\tau}.$$

Neben dieser konformen Abbildung der Minimalfläche auf die Ebene kennen wir aber noch eine wesentlich verschiedene Abbildung. Diese ergibt sich sofort aus unserer Definition der Minimalfläche als Fläche konformer sphärischer Abbildung. Wir können nämlich die Bildkugel wiederum durch stereographische Projektion konform auf die Ebene abbilden.

Eine Figur wird dies deutlich machen. Dem Flächenpunkt $\gamma(x_1, x_2, x_3)$ entspricht zunächst der Kugelpunkt $\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Diesem ordnen wir durch stereographische Projektion einen Punkt der komplexen u -Ebene zu. Dies geschieht durch die Gleichung

$$\frac{\xi_1 + i \xi_2}{1 - \xi_3} = u \quad \frac{\xi_1 - i \xi_2}{1 - \xi_3} = v = \bar{u}.$$

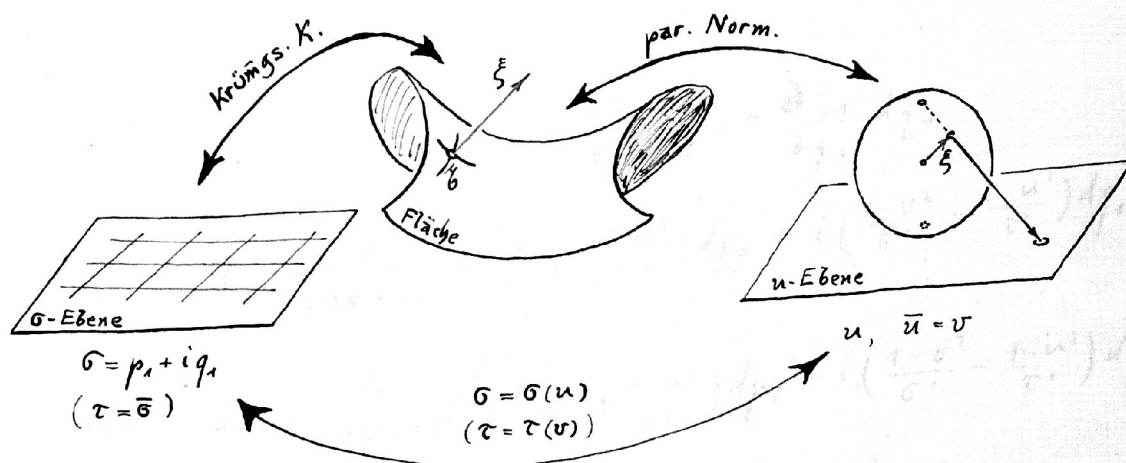
Hieraus erhält man:

$$(8) \quad \underline{d\xi^2 = \frac{4 du dv}{(uv+1)^2} = \frac{dy^2}{R^2}}.$$

Wir haben also die Minimalfläche auf zwei wesentlich verschiedene Arten auf komplexe Ebenen abgebildet. $d\sigma d\tau$ ist das Quadrat des Linienelements in der komplexen G -Ebene, $du dv$ ist das Quadrat des Linienelements in der komplexen u -Ebene:

$$dy^2 = R d\sigma d\tau \quad dy^2 = R^2 d\xi^2$$

$$d\xi^2 = \frac{4 du dv}{(uv+1)^2}$$



Beide Ebenen können wir durch eine analytische Funktion $G = G(u)$ (bezw. $\tau = \tau(v)$) aufeinander abbilden. Diese doppelte konforme Abbildung gibt uns nun die Möglichkeit, unter Benutzung der Parameter u und v eine sehr elegante Darstellung der Minimalfläche zu finden, die sogenannten Weierstrass'schen Formeln. Wir erhalten sie, wenn wir in den drei Gleichungen (5)

$$(5) \quad dz = R \left(\frac{\partial \xi}{\partial p_1} dp_1 - \frac{\partial \xi}{\partial q_1} dq_1 \right)$$

alle Größen R, p_1, q_1, ξ als Funktionen von u und v ausdrücken. Das geschieht am kürzesten folgendermassen:

aus $\xi_1 = \frac{u+v}{uv+1}$ folgt:

$$(9) \quad d\xi_1 = \frac{1}{(uv+1)^2} \left\{ (1-v^2) du + (1-u^2) dv \right\}$$

hieraus wird wegen

$$d\sigma = \sigma'(u) du \quad d\tau = \tau'(v) dv$$

$$(10) \quad d\xi_1 = \frac{1}{(uv+1)^2} \left\{ \frac{1-v^2}{\sigma'} d\sigma + \frac{1-u^2}{\tau'} d\tau \right\}$$

hieraus wird wegen

$$d\sigma = dp_1 + i dq_1 \quad d\tau = dp_1 - i dq_1$$

$$= \frac{\partial \xi_1}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} dq_1$$

$$(11) \quad d\xi_1 = \frac{1}{(uv+1)^2} \left\{ \left(\frac{1-v^2}{\sigma'} + \frac{1-u^2}{\tau'} \right) dp_1 + i \left(\frac{1-v^2}{\sigma'} - \frac{1-u^2}{\tau'} \right) dq_1 \right\}$$

$$(12) \quad dx_1 = \frac{R}{(uv+1)^2} \left\{ \left(\frac{1-v^2}{\sigma'} + \frac{1-u^2}{\tau'} \right) dp_1 - i \left(\frac{1-v^2}{\sigma'} - \frac{1-u^2}{\tau'} \right) dq_1 \right\}$$

$$(13) \quad dx_1 = \frac{R}{(uv+1)^2} \left\{ \frac{1-v^2}{\sigma'} d\tilde{\tau} + \frac{1-u^2}{\tau'} d\sigma \right\} \quad (\text{vgl. (8)})$$

$$(14) \quad dx_1 = \frac{1}{4} \left\{ (1-v^2) \left(\frac{d\tilde{\tau}}{d\sigma} \right)^2 + (1-u^2) \left(\frac{d\sigma}{du} \right)^2 du \right\}$$

Ähnliche Formelreihen ergeben sich für die Indices 2 und 3. Bezeichnet man die analytische Funktion $\frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma}{du} \right)^2$ mit $U(u)$ und entsprechend $\frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{\tau}}{d\sigma} \right)^2$ mit $V(v)$, wobei $U(u)$ und $V(v)$ konjugiert imaginäre Funktionen konjugiert imaginärer Argumente sind, so erhält man die Weierstrass'schen Formeln

$$(15) \quad \begin{cases} dx_1 = \frac{1-u^2}{2} U(u) du + \frac{1-v^2}{2} V(v) dv = R((1-u^2) U(u) du) \\ dx_2 = \frac{i}{2} (1+u^2) U(u) du - \frac{i}{2} (1+v^2) V(v) dv = R(i(1+u^2) U(u) du) \\ dx_3 = u U(u) du + v V(v) dv = R(2u U(u) du). \end{cases}$$

In dieser Form lassen sich alle reellen Minimalflächen darstellen.

III. Minimalkurven als Parameterlinien auf der Minimalfläche.

Die Darstellung der Minimalflächen gestaltet sich auch dann besonders einfach, wenn man das System der Minimalkurven bei der Betrachtung der Fläche zu Grunde legt. Dies sind die

Kurven, deren Tangenten in jedem Punkt nach den imaginären Kreispunkten der betreffenden Tangentialebene hinweisen, also die Richtungsfaktoren $\pm i$ besitzen. Wir sehen sofort, dass auf jeder Minimalfläche die Minimalkurven ein konjugiertes Netz bilden. Die Indicatrix ~~ist~~^{ist} ja in jedem Punkt eine gleichseitige Hyperbel, und bei dieser heisst die Richtungsbedingung für konjugierte Durchmesser $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1$. Diese Bedingung wird aber offenbar von den Richtungsfaktoren $+i$ und $-i$ erfüllt. Diese Eigenschaft der Minimalkurven, auf der Minimalfläche ein konjugiertes Netz zu bilden, steht in schöner Analogie dazu, dass die Haupttangentialkurven (das sind die Kurven, deren Richtung in jedem Flächenpunkt mit einer Asymptotenrichtung der zugehörigen Indicatrix übereinstimmt) ein orthogonales Netz bilden. Diese Analogie tritt auch analytisch in Erscheinung, wenn man die üblichen Abkürzungen der Flächentheorie einführt.

Ist $\zeta(u, v)$ der Ortsvektor nach einem gewöhnlichen Flächenpunkt einer beliebigen Fläche, $\xi(u, v)$ der Normaleinheitsvektor, so sind die sechs Fundamentalgrössen gegeben durch:

$$\begin{aligned} E &= \zeta_u^2 & L &= -\zeta_u \xi_u \\ (16) \quad F &= \zeta_u \zeta_v & M &= \zeta_{uv} \xi \\ G &= \zeta_v^2 & N &= -\zeta_v \xi_v \end{aligned}$$

In dieser Bezeichnungsweise wird:

$$(17) \quad d\zeta^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad (1. \text{ Grundform})$$

$$-d\zeta d\xi = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 \quad (2. \text{ Grundform})$$

$F=0$ bedeutet, dass die Parameterlinien $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ ein orthogonales, $M=0$, dass sie ein konjugiertes Netz bilden. (Die anschauliche Betrachtung S. 3 zeigte sofort für konjugierte Linien $\zeta_u \xi_u = 0$).

Nun besteht folgende Analogie :

I. Dadurch, dass wir die erste Grundform gleich Null setzen, definieren wir in jedem Punkt zwei Fortschreitungsrichtungen. Die so erhaltenen Kurvenscharen nennen wir die Minimalkurven ($df^2 = 0$ d.h. ihre Bogenlänge ist stets 0).

Durch Polarenbildung erhalten wir in jedem Flächenpunkt eine Strahleninvolution, deren Paare harmonisch zu ihren Doppelstrahlen, den Minimalkurven, liegen. Dies ist die Involution aller rechtwinkligen Strahlenpaare.

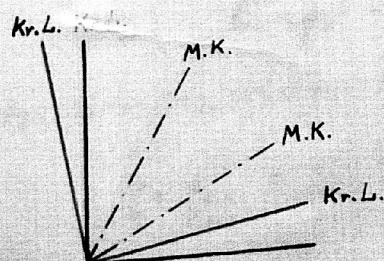
$$(18) \quad \begin{aligned} df^2 &= Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2 = 0 && (\text{Minimalkurven}) \\ df \delta f &= Edu du + F(du \delta v + dv \delta u) + Gdv \delta v = 0 && (\text{Rechtwinkl.-Involut.}) \end{aligned}$$

II. Dadurch, dass wir die 2. Grundform gleich Null setzen, definieren wir in jedem Punkt zwei Fortschreitungsrichtungen. Die so erhaltenen Kurvenscharen nennen wir die Haupttangentialkurven ($df \perp d\xi$ d.h. in jedem ihrer Punkte hat der zugehörige Normalschnitt einen Wendepunkt.)

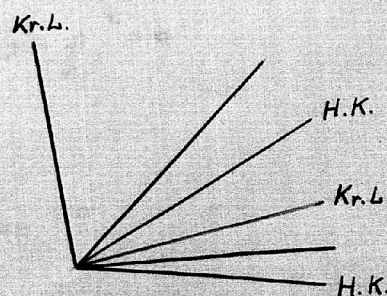
Durch Polarenbildung erhalten wir in jedem Flächenpunkt eine Strahleninvolution, deren Paare harmonisch zu ihren Doppelstrahlen, den Haupttangentialkurven, liegen. Dies ist die Involution aller konjugierten Strahlenpaare.

$$(19) \quad \begin{aligned} -df d\xi &= L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0 && (\text{Haupttangentialkurven}) \\ -df \delta \xi &= L du du + M(du \delta v + dv \delta u) + N dv \delta v = 0 && (\text{Involut. d. konjug. Strahlenpaare}). \end{aligned}$$

Beide Involutionen haben ein Strahlenpaar gemeinsam, nämlich das Paar der Krümmungslinien, das zugleich rechtwinklig und konjugiert ist. (Vgl. die Figuren)



I. Rechtw. Involut.



II. Konjug.

Wir kehren jetzt wieder zu den Minimalflächen zurück. Sie sind dadurch charakterisiert, dass die Summe der Hauptkrümmungsradien (~~und~~^{oder} die mittlere Krümmung) verschwindet. Dies drückt sich in unserer Bezeichnungsweise folgendermassen aus:

$$2H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} = 0 \quad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Hieraus lesen wir noch einmal unmittelbar ab:

I. Die Minimalkurven sind konjugiert. Wählen wir sie nämlich zu Parameterlinien, was nach I $E = G = 0$ bedeutet, so folgt aus $H = 0$ wegen $F = 0$ notwendig $M = 0$.

II. Die Haupttangentialkurven sind rechtwinklig. Wählen wir sie zu Parameterlinien, was nach II $L = N = 0$ bedeutet, so folgt $F = 0$. Aus I folgt II und umgekehrt, denn wenn die Minimalkurven konjugiert sind, so kommen sie in der Involution II vor, liegen also harmonisch zu den Haupttangentialkurven. Also kommen diese in der Involution I vor. Also sind sie rechtwinklig; und umgekehrt.

(Bei der Kugel sind die Begriffe konjugiert und rechtwinklig identisch, die Minimalkurven fallen mit den Haupttangentialkurven zusammen.)

Aus I können wir wichtige Konsequenzen ziehen. Es zeigt sich nämlich, dass die Minimalfläche "Schiebfläche" ist, d.h. durch Parallelverschiebung einer Minimalkurve an ihrer konjugierten entsteht. Dies erkennen wir so: Schreiben wir für die Minimalkurven als Parameterlinien α, β statt u, v , so ist

$$(20) \quad M = \xi_{\alpha\beta} \xi = 0$$

Aus den Identitäten

$$(21) \quad E = \xi_{\alpha}^2 = 0 \quad G = \xi_{\beta}^2 = 0$$

folgt durch Differentiation:

$$\xi_{\alpha} \xi_{\alpha\beta} = 0 \quad \xi_{\beta} \xi_{\alpha\beta} = 0$$

Zusammen mit $M=0$ ergibt dies, weil $\xi, \zeta_\alpha, \zeta_\beta$ linear unabhängig sind :

$$\zeta_{\alpha\beta} = 0$$

Wir können sofort integrieren und finden für unsere Fläche folgende Darstellung :

$$(22) \quad \zeta = f(\alpha) + g(\beta)$$

Dies ist die charakteristische Gleichung einer Schiebfläche.

$f(\alpha)$ und $g(\beta)$ sind die Ortsvektoren zweier Kurven. Durch additives Zusammensetzen erhält man einen Punkt der Schiebfläche. Beide Kurven spielen eine völlig gleichberechtigte Rolle.

Das Problem, die Minimalfläche analytisch darzustellen, läuft nun darauf hinaus, die beiden Differentialgleichungen

$$(23) \quad \begin{cases} f_1'^2(\alpha) + f_2'^2(\alpha) + f_3'^2(\alpha) = 0 \\ g_1'^2(\beta) + g_2'^2(\beta) + g_3'^2(\beta) = 0 \end{cases}$$

zu integrieren, denn in Koordinatendarstellung lautet $E-G=0$

$$f_1'^2(\alpha) = 0 \quad g_1'^2(\beta) = 0$$

Dann lautet die Gleichung der Minimalfläche :

$$(24) \quad \begin{aligned} x_1 &= f_1(\alpha) + g_1(\beta) \\ x_2 &= f_2(\alpha) + g_2(\beta) \\ x_3 &= f_3(\alpha) + g_3(\beta) \end{aligned}$$

Weierstrass hat eine besonders elegante Substitution angegeben, um die Gleichungen (23) zu integrieren. Er setzt :

$$(25) \quad \frac{f_1'(\alpha) + i \frac{f_2'(\alpha)}{f_3'(\alpha)}}{-f_3'(\alpha)} = u$$

Dann wird :

$$(26) \quad \frac{f_1'(\alpha)}{1-u^2} = \frac{f_2'(\alpha)}{i(1+u^2)} = \frac{f_3'(\alpha)}{2u}$$

Diesen gemeinsamen Wert bezeichnen wir mit

$$(27) \quad \frac{1}{2} U(u) \frac{du}{d\alpha}.$$

Dann erhalten wir sofort :

$$(28) \quad \begin{aligned} f_1(\alpha) &= \frac{1}{2} \int (1-u^2) U(u) du \\ f_2(\alpha) &= \frac{i}{2} \int (1+u^2) U(u) du \\ f_3(\alpha) &= \int u U(u) du. \end{aligned}$$

Entsprechendes ergibt sich als Lösung der zweiten Gleichung (23).
Durch Einsetzen in die Gleichungen (24) erhalten wir die allgemeinen Formeln von Weierstrass. Durch die Formeln sind mit einem Schlag alle reellen und imaginären Minimalflächen gefunden. Reell ist eine Minimalfläche, wenn für sie sowohl u und v wie $U(u)$ und $V(v)$ konjugiert imaginär sind.

IV. Stützebenenfunktion ist Potentialfunktion.

Wir können die Weierstrass'schen Formeln, die für die Theorie der Minimalflächen eine fundamentale Bedeutung haben, noch auf eine dritte wesentlich verschiedene Art ableiten, wenn wir die "Stützebenenfunktion" ξ zu Hilfe nehmen. Sie ist definiert als die Entfernung der Tangentialebene des betrachteten Flächenpunktes von einem beliebigen festgehaltenen Punkt in K ihrer Abhängigkeit vom Normaleneinheitsvektor ξ :

$$\xi = \xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3); \quad \sum_{\alpha=1}^3 \xi_\alpha^2 = 1.$$

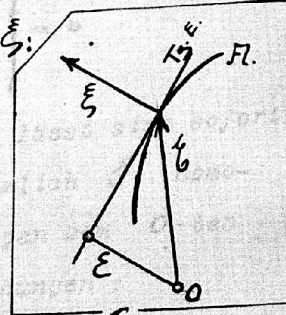
Man kann aus der Figur sofort ablesen :

$$(29) \quad \begin{aligned} \xi &= \xi \xi = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha \xi_\alpha \\ d\xi &= \xi d\xi = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha d\xi_\alpha. \end{aligned}$$

Andererseits ist $d\xi = \sum_{\alpha=1}^3 \xi_\alpha d\xi_\alpha$ (ξ_α Abkürzung für ξ_{ξ_α}).

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt :

$$0 = \sum_{\alpha=1}^3 (x_\alpha - \xi_\alpha) d\xi_\alpha$$



Andererseits folgt aus $\sum_{\alpha=1}^3 \xi_{\alpha}^2 = 1$:

$$0 = \sum_{\alpha=1}^3 \xi_{\alpha} d\xi_{\alpha}$$

also

$$(30) \quad x_{\alpha} - \xi_{\alpha} = \lambda \xi_{\alpha},$$

d.h. nach (29)

$$\lambda = \xi - \sum_{\alpha=1}^3 \xi_{\alpha} \xi_{\alpha}.$$

Wenn $\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ positiv homogen vom ersten Grade ist, dann wird auf Grund der Homogenitätsrelation $\lambda = 0$ und :

$$(31) \quad x_{\alpha} = \xi_{\alpha}.$$

Wir wollen nun die Hauptkrümmungsradien aus der Stützebenenfunktion ermitteln und knüpfen dabei an die Formeln von Olinde Rodrigues (1)S.5 an. Es ist

$$(32) \quad dx_{\alpha} + R d\xi_{\alpha} = 0$$

oder, wenn ξ homogen vom ersten Grade ist,

$$(33) \quad \sum_{\beta=1}^3 \xi_{\alpha\beta} d\xi_{\beta} + R d\xi_{\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Da die $d\xi_{\alpha}$ nicht alle Null sind, muss die Determinante des Gleichungssystems (33) verschwinden :

$$(34) \quad \begin{vmatrix} \xi_{11} + R & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} + R & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} + R \end{vmatrix} = 0.$$

Diese scheinbar kubische Gleichung für R lässt sich sofort auf eine quadratische zurückführen. Wenn nämlich ξ homogen vom ersten Grade ist, muss ξ_{α} homogen vom 0-ten Grade sein. Es bestehen also die drei Gleichungen :

$$\sum_{\beta=1}^3 \xi_{\alpha\beta} \xi_{\beta} = 0 \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Ihre Determinante, die das Absolutglied in (34) ist, muss verschwinden. Also reduziert sich die kubische Gleichung (34) auf die quadratische :

$$(35) \quad R^2 + \sum_{\alpha=1}^3 \mathcal{E}_{\alpha\alpha} R + \dots = 0.$$

Also folgt für die Summe der Hauptkrümmungsradien :

$$-(R_1 + R_2) = \sum_{\alpha=1}^3 \mathcal{E}_{\alpha\alpha}.$$

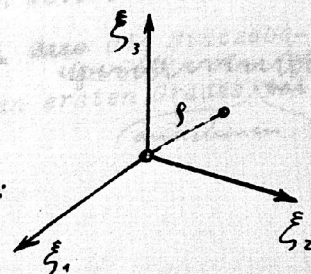
Jetzt sei unsere Fläche Minimalfläche. Das bedeutet $R_1 + R_2 = 0$.
Also genügt die Stützebenenfunktion (immer homogen vom ersten Grad vorausgesetzt) auf ihr der Laplace'schen Potentialgleichung:

$$(36) \quad \Delta \mathcal{E} = 0.$$

Dieses Resultat eröffnet uns einen neuen Weg zu den Weierstrass'schen Formeln :

Auf einem Strahl durch den Nullpunkt des ξ -Raumes ist $\mathcal{E}_\alpha$ (unter der obigen Voraussetzung!) konstant und ebenfalls:

$$u = \frac{\xi_1 + i\xi_2}{\rho - \xi_3} \quad \rho^2 = \sum_{\alpha=1}^3 \xi_\alpha^2$$



Wir können also $\mathcal{E}_\alpha$ als Funktion von u ansetzen :

$$(37) \quad \mathcal{E}_\alpha = f_\alpha(u)$$

hieraus :

$$(38) \quad \mathcal{E}_{\alpha\beta} = f'_\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial \xi_\beta}$$

Aus (36) folgt :

$$\sum_{\alpha=1}^3 \mathcal{E}_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 f'_\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} = 0$$

Andererseits ist :

$$\sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} \right)^2 = 0.$$

Aus beiden folgt :

$$f'_\alpha(u) = \lambda \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha}.$$

Aus (38) ergibt sich:

$$\sum_{\beta=1}^3 \xi_{\alpha\beta} = \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} \lambda \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \xi_\beta}$$

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial u} = \sum_{\beta=1}^3 \xi_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} \lambda \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial u}$$

also

$$(39) \quad \frac{\partial x_\alpha}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} \lambda(u)$$

Für $\frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha}$ erhalten wir $\frac{1}{\int} \frac{1-u^2}{2}$ bzw. $\frac{i}{\int} \frac{1+u^2}{2}$ bzw. $\frac{1}{\int} u$,
die bekannten Ausdrücke in den Formeln von Weierstrass.

In der Tat lässt sich aber ~~annehmen~~ dass die Stützebe-
nenfunktion ~~bei einem Minimum~~ ^{ignoriert werden kann.} homogen ersten Grades ^{annehmen.}
~~annimmt.~~

II.

Physikalisches zum Plateau'schen Problem.

Vorträge Ing. G. Grütz.

Wie schon oben erwähnt, verdankt die Theorie der Mini-
malflächen dem Variationsproblem $\iint \sqrt{1+p'^2+q'^2} dx dy = \text{Min.}$
ihre Entstehung (Legendre 1760/61).⁵ Die Euler'sche Gleichung
dieses Problems erweist sich mit der Bedingung des Verschwindens
der mittleren Krümmung

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

identisch, womit der Anschluss an die vorangehenden Ueberle-
gungen gewonnen ist.

Die Euler'sche Gleichung stellt bekanntlich nur eine
notwendige Bedingung für das Eintreten eines Extremums dar und
setzt die Existenz einer Lösung voraus. Auf die sich hieran