1.

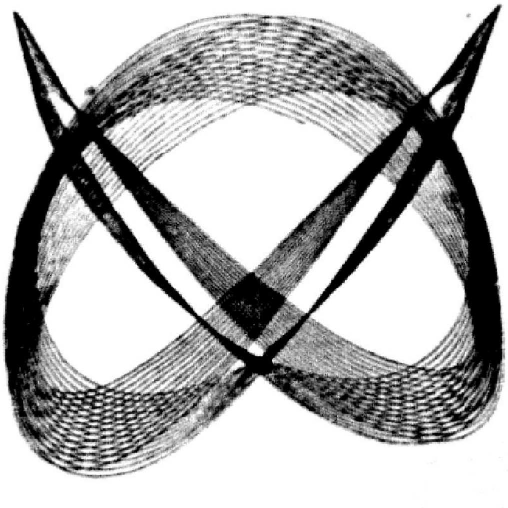
Lissajous'sche Stimmgabelkurven

in stereoskopischer Darstellung

18 Tafeln mit Text

Von

J. W. N. Le Heux
Oberleutnant an der Kriegsakademie in
Breda (Holland)



Leipzig
VERLAG von JOHANN AMBROSIUS BARTH
1911.

Vorwort.

Die Figuren, nachher bekannt als Lissajoussche Stimmgabelkurven, wurden im Oktober 1857 von dem französischen Physiker in den „Annales de Chimie et de Physique, 3e série, t. LI publiziert unter den Namen: „Courbes obtenues par la composition optique de deux mouvements vibratoires de directions rectangulaires". Einige Zeit später findet man in den „Comptes Rendus" t. 130, pg. 1616 die Mitteilung, daß man von den genannten Figuren stereoskopische Bilder erhalten kann, wenn man zwei gleiche Kurven zeichnet, welche nur eine geringe Phasendifferenz aufweisen. Eine derartige Zeichnung nun mechanisch z.B. mittels zweier Pendel auszuführen, bringt große Schwierigkeiten mit sich; namentlich ist dies der Fall, wenn man sich nicht begnügt, zwei Einzelkurven darzustellen, sondern wenn man auch die Figuren zeichnen will, welche entstehen, wenn die Schwingungen der Pendel längere Zeit fortwähren und immer kleiner werdende Amplituden beschreiben. In der vorliegenden Sammlung sind einige schöne Beispiele dieser Art zu finden.

Erklärung der Figuren.

Die Lissajous'schen Kurven sollen nicht nur den Physiker, sondern auch den Mathematiker interessieren. Wohl werden sie genannt in „Gino Loria, Spezielle ebene Kurven", auch findet man sie bisweilen als Beispiel (Beutel, Algebraische Kurven, Samml. Göschen p. 62), aber die schönen Raumgebilde, welche sich im Stereoskop zeigen, eröffnen dem Mathematiker ein ausgedehntes Gebiet für neue Untersuchungen. Einige Resultate sind im Texte aufgenommen, ohne jedoch die mathematische Theorie zu entwickeln.

Ist das Verhältnis der Schwingungszahlen 1 : 1, so entsteht als Einzelkurve im allgemeinen eine Ellipse (Unisson de Lissajous); nur wenn die Phasendifferenz der zwei zusammensetzenden Bewegungen 0^0 oder 90^0 ist, entsteht entweder eine gerade Linie, diagonal im Rechtecke der Amplituden, oder ein Kreis. Im Stereoskop erscheint diese Ellipse wie ein Kreis im Raume (Tafel I); tatsächlich ist sie im allgemeinen wiederum eine Ellipse und zwar der Durchschnitt eines elliptischen Zylinders (oder Rotationszylinders, wenn die Amplituden einander gleich sind) mit einer Ebene, wie man mit Hilfe der Analysis nachweist. Setzt man nun die Schwingungen fort mit immer kleiner werdenden Amplituden, so ändert sich die Leitlinie dieses Zylinders und zugleich die Lage der Schnittebene, auch infolge einer fast unmerkbaren Differenz der Pendellängen: man erhält also anscheinend eine Ellipsenschar, in Wirklichkeit aber ist die ganze Figur eine einzige Kurve. Im Stereoskop erscheint sie wie ein Band, dessen Grenzkurven zwei ebene, durch einander gesteckte Kreise sind, welche sich aber nicht schneiden. (Tafel 2.)

Setzt man die Schwingungen weiter fort, so entstehen die Figuren der Tafel 3. In der Mitte des Stereoskopbildes erblickt man zwei ebene Kreise, welche sich schneiden. Aber auch ohne Stereoskop ist die Einzelfigur bemerkenswert: die Ellipsen berühren alle vier Seiten eines Rechtecks und man zeigt mit Hilfe der Analysis, daß man hier die Projektionen der Krümmungskurven eines Ellipsoïds mechanisch konstruiert hat. (Mathésis 3e série t. X pp. 209—212.)

Ist das Verhältnis der Schwingungszahlen 1:2, so erhält man die Kurven der Tafel 4. Im Stereoskop tritt die Mitte der Figur hervor; oben und unten aber weicht sie zurück. Die Kurve schneidet sich nicht nur in der Zeichenebene, sondern auch im Raume; das Stereoskop zeigt also, daß der Doppelpunkt zugleich auch ein räumlicher Doppelpunkt ist, was auch aus der Berechnung, aber viel schwieriger, erfolgt.

Nimmt man nun dieselben zwei Kurven, aber je um 90° gedreht (Tafel 5), so zeigt das Stereoskopbild einen Sattel: die Kurve schneidet sich wohl in der Zeichenebene, aber nicht im Raume, hat also keinen räumlichen Doppelpunkt.

Auch das Verhältnis 1:2 hat mathematische Bedeutung: fangen die Bewegungen gleichzeitig an, so entsteht eine Parabel; gibt es eine Phasendifferenz, so entsteht die virtuelle Parabel von Gregorius a. S. Vincentio, welche eine Plankurve 4ten Grades ist. Auch die Raumkurven, welche das Stereoskop hervorruft, sind sehr bemerkenswert: die der Tafel 4 ist für ein Verhältnis der Amplituden 1 : 2 die bekannte Schnittlinie einer Kugel mit einem Rotationszylinder, dessen Achse in der Figur vertikal ist, und dessen Grundfläche den Radius der Kugelprojektion auf dieser Fläche zum Durchmesser hat (Florentinische Aufgabe von Viviani); die der Tafel 5 ist Schnittlinie eines hyperbolischen Paraboloïds mit einem elliptischen Zylinder.

Werden die Schwingungen fortgesetzt, so entstehen zwei verschiedene gekrümmte Flächen; ebenso wie bei den Tafeln 1—3 ändert sich die Einzelkurve allmählich mit der kleiner werdenden Amplitude: sie strebt einer Parabel zu, welche auf Tafel 6 eine horizontale, auf Tafel 7 eine vertikale Achse hat; der Doppelpunkt wird Scheitelpunkt dieser Parabel. Die gekrümmte Fläche wird um so deutlicher, je weiter man die Bewegungen fortsetzt, aber auch, je dichter die Einzelkurven an einander schliessen; diese letzte Tatsache aber bildet Schwierigkeiten für eine gute Reproduktion. Tafel 8 stellt die Sattelfläche eines hyperbolischen Paraboloïds dar; der Deutlichkeit wegen ist der mittlere Teil der Figur fortgelassen. Tafel 9 zeigt die Einzelkurve für das Verhältnis 2 : 3. Ist die Phasendifferenz = 0°, so bildet die Kurve eine Schleife mit zwei parabolischen Zügen (divergente Parabel von Newton); die linke Figur der Tafel 9 stimmt überein mit einer Phasendifferenz von nahezu 90°.

Tafel 10 gibt dieselben Kurven, nur mit einigen Schwingungen mehr und je um 90° gedreht. Infolge dieser Drehung aber werden die räumlichen Doppelpunkte ganz anders gruppiert, wie man auch bei einer Vergleichung mit Tafel 11 sieht. Die Raumkurven liegen wieder auf vertikalen elliptischen oder Rotationszylindern. Tafel 12 stellt die Einzelkurven für das Verhältnis 3 : 4 dar. Für eine Phasendifferenz = 0° hat die Kurve zwei parabolische Züge und drei Doppelpunkte. Stereoskopische Wirkung tritt schon auf, wenn man eine Kopie der linken Figur auf Tafel 12 um 180° dreht und neben das Original stellt.

Tafel 13 gibt wiederum eine Schar Einzelkurven, Tafel 14 dieselben Figuren mit mehreren Schwingungen und je um 90° gedreht. Man beobachte auch hier die Lage der räumlichen Doppelpunkte.

Tafel 15 zeigt die Einzelkurven für das Verhältnis 3 : 5, Tafel 16 dieselben nach 10 Schwingungen. Man liest hier, wie auf den übrigen Tafeln, in der Figur das Verhältnis der Schwingungszahlen ab, indem man horizontal und vertikal die Scheitelpunkte zählt. Fangen die Schwingungen gleichzeitig an, so hat die Einzelkurve zwei parabolische Züge, einen links oben und einen rechts unten. (Man sehe die linke Figur auf Tafel 16, wo die Phasendifferenz sehr gering ist). Die parabolischen Züge der Lissajous'schen Figuren können natürlich nur bis zu gewissen Grenzen beschrieben werden; ihre Endpunkte sind räumliche Maximal- oder Minimalpunkte — in diesem Falle (also für eine Phasendifferenz = 0°) wird dieselbe Plankurve genau zweimal beschrieben, d. h. die Projektion der einen Hälfte der Raumkurve bedeckt die Projektion der anderen Hälfte.

Zum Schluß findet man auf den Tafeln 17 und 18 die Kurven für das Verhältnis 4 : 5. Größere Zahlen geben Verwirrungen in den Darstellungen.